Frühjahr 13 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen und sei v das durch $v(x,y) := \begin{pmatrix} f(y) \\ g(x) \end{pmatrix}$ auf $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ definierte Vektorfeld. Seien F, G Stammfunktionen von f bzw. g.

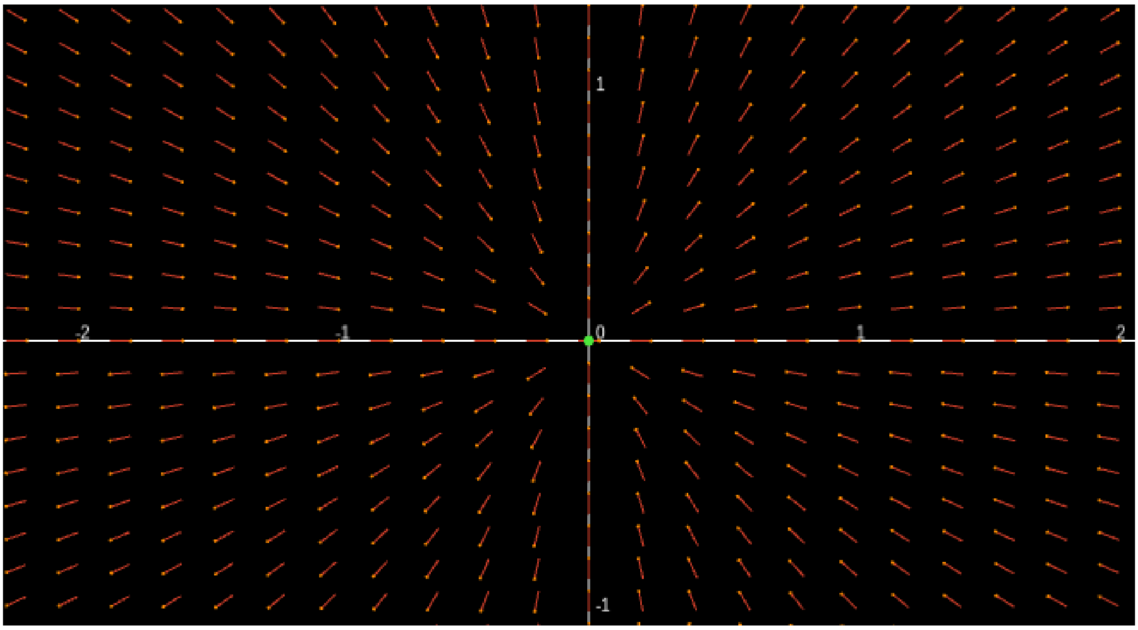
a) Man zeige, dass die Funktion $E(x,y) := F(y) - G(x)$ auf M ein erstes Integral von v ist. (Ein erstes Integral ist eine *Erhaltungsgröße*, also eine stetig differenzierbare Funktion E, deren Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet; d. h. $E'(x,y)v(x,y) = 0$. Ein erstes Integral ist demnach auf Integralkurven konstant.)

b) Man betrachte nun das spezielle Vektorfeld $v(x,y) := \begin{pmatrix} 1/y \\ 1/x \end{pmatrix}, (x,y) \in M$, und skizziere dessen Phasenportrait.

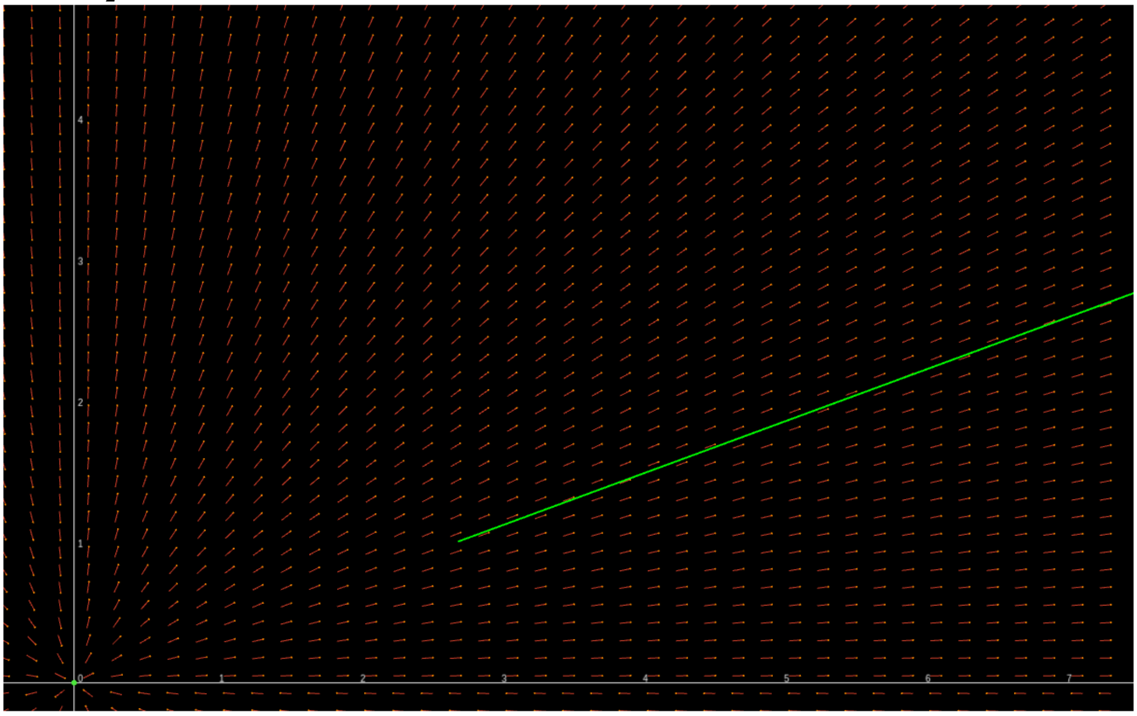
c) Man bestimme die maximale Lösung $u : J \to M, u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$, des Anfangswertproblems $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y \\ 1/x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$.
(Hinweis: Es gilt $E(u(t)) = E(u(0))$ für alle $t \in J$.)

Lösungsvorschlag:

a) Per Definition sind F, G differenzierbar mit stetigen Ableitungen f, g und daher stetig differenzierbar, womit auch ihre Differenz stetig differenzierbar ist. Es gilt $E'(x,y)v(x,y) = \begin{pmatrix} -g(x) \\ f(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(y) \\ g(x) \end{pmatrix} = f(y)g(x) - g(x)f(y) = 0$ für alle $(x,y) \in M$.

b) 

c) Wir bestimmen zunächst Stammfunktionen F, G. Wegen $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ für $t > 0$ können wir $F(y) = \ln(y)$ und $G(x) = \ln(x)$ wählen. Nach a) ist $\ln(y) - \ln(x) = \ln(\frac{y}{x})$ eine Erhaltungsgröße. Es gilt also $\ln(\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}) = -1$ für alle $t \in J$ und folglich $\beta(t) = \frac{1}{e}\alpha(t)$.
Damit erhalten wir $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \frac{1}{e}\alpha'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{\alpha(t)} \\ \frac{1}{\alpha(t)} \end{pmatrix}$. Also muss α dem Anfangswertproblem $\alpha' = \frac{e}{\alpha}, \alpha(0) = e$ genügen.
Diese Differentialgleichung ist trennbar, wir erhalten $\alpha(t)\alpha'(t) = e$ und daher $\int_e^{\alpha(t)} s \, \mathrm{d}s = \int_0^t e \, \mathrm{d}s$, also $\frac{1}{2}(\alpha(t)^2 - e^2) = et$ und schließlich $\alpha(t) = \sqrt{2et + e^2}$. Wir haben das positive Vorzeichen gewählt, um die Anfangsbedingung zu erfüllen.
Die Maximallösung u lautet demnach $u(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2et + e^2} \\ \frac{1}{e}\sqrt{2et + e^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2et + e^2} \\ \sqrt{\frac{2}{e}t + 1} \end{pmatrix}$. Diese ist differenzierbar und wohldefiniert genau für $2et + e^2 > 0 \iff t > -\frac{e}{2}$. Also ist $J = (-\frac{e}{2}, \infty)$.



$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$