Frühjahr 13 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man bestimme die Gesamtheit aller reellwertigen beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Lösungsvorschlag:

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet $0 = z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$. Also sind $\pm i$ die einzigen Lösungen und beide sind von doppelter Vielfachheit.
Laut der allgemeinen Theorie bilden die vier Funktionen

$$\cos(t), t\cos(t), \sin(t), t\sin(t)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Die allgemeine reellwertige Lösung lautet demnach

$$x(t) = (a\cos(t) + c\sin(t)) + t(b\cos(t) + d\sin(t)) \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass diese genau dann beschränkt ist, wenn $b = 0 = d$ gilt.
Der erste Summand ist beschränkt durch $|a|+|c|$, daher ist x genau dann beschränkt, wenn der zweite Summand beschränkt ist.
Wäre $b \neq 0$, so ist $\frac{d}{b} \in \mathbb{R}$ und wir können $t_0 = \arctan(\frac{d}{b})$ betrachten. Es gilt dann insbesondere $\cos(t_0) \neq 0$. Für die Punkte $t_k := t_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$t_k(b\cos(t_k) + d\sin(t_k)) = t_k\cos(t_0)(b + d\tan(t_0)) = \frac{t_k\cos(t_0)}{b}(b^2 + d^2).$$

Dies ist für $k \in \mathbb{Z}$ offensichtlich unbeschränkt, weil $\frac{\cos(t_0)}{b}(b^2+d^2) \neq 0$ gilt.
Ist stattdessen $d \neq 0$ zeigt ein analoges Vorgehen über den Cotangens und seine Umkehrfunktion wiederum die Unbeschränktheit.
Insgesamt folgt also, dass die Menge der gesuchten Funktionen durch

$$\{a\cos(t) + c\sin(t) : a, c \in \mathbb{R}\}$$

gegeben ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$