Frühjahr 13 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(z) := (z-\pi)\sin(z), z \in \mathbb{C}$, um den Entwicklungspunkt $w := \pi$.

b) Sei $\gamma(\theta) := e^{i\theta}$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

  i) Berechnen Sie $I := \int_\gamma \frac{z^2}{2z+1} \mathrm{d}z$.

  ii) Zeigen Sie, dass
$$\int_0^\pi \frac{2\cos(2\theta)+\cos(3\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} \text{ gilt,}$$
indem Sie das Wegintegral I in Teil (i) als Integral über $[-\pi, \pi]$ betrachten.

Lösungsvorschlag:

a) Mithilfe das Additionstheorems des Sinus erhalten wir $\sin(z) = \sin(z-\pi+\pi) = \sin(z-\pi)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(z-\pi) = -\sin(z-\pi)$ und $f(z) = -(z-\pi)\sin(z-\pi) = -(z-\pi)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!}$.

b) i) γ ist ein geschlossener, stetig differenzierbarer Weg, der in $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ verläuft. $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und der Integrand ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$. Nach dem Residuensatz gilt $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{z^2}{2z+1}}(-\frac{1}{2}) = 2\pi i \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{\pi}{4}i$. Dabei haben wir das Residuum in $-\frac{1}{2}$ mit der Formel für Pole erster Ordnung berechnet, da es sich hier um einen solchen Pol erster Ordnung handelt.

ii) Wir berechnen I mit der Definition. Es ist $I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{2i\theta}}{2e^{i\theta}+1} ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{3i\theta}}{2e^{i\theta}+1}\,\mathrm{d}\theta$. Wir formen den Integranden etwas um. Es ist $\frac{e^{3i\theta}}{2e^{i\theta}+1} = \frac{e^{3i\theta}(2e^{-i\theta}+1)}{(2e^{i\theta}+1)(2e^{-i\theta}+1)} = \frac{2e^{2i\theta}+e^{3i\theta}}{5+4\cos(\theta)}$. Den Zähler schreiben wir mit der Eulerformel als $2\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+i(2\sin(2\theta)+\sin(3\theta))$ und bemerken, dass der Nenner reell ist.
Es folgt also nach Division durch i, dass $\frac{\pi}{4} = I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos(2\theta)+\cos(3\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_{-\pi}^{\pi} i\frac{2\sin(2\theta)+\sin(3\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ ist. Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil zeigt, dass das erste Integral auf der rechten Seite $\frac{\pi}{4}$ beträgt, während, das zweite Integral verschwindet.
Wegen $\frac{2\cos(2\theta)+\cos(3\theta)}{5+4\cos(\theta)} = \frac{2\cos(2(-\theta))+\cos(3(-\theta))}{5+4\cos(-\theta)}$ handelt es sich bei dem Integranden aus der Aufgabenstellung um eine gerade Funktion. Also ist das Integral über das Intervall $[0,\pi]$ genau halb so groß, wie das Integral über $[-\pi,\pi]$. Letzteres konnten wir berechnen, es hat den Wert $\frac{\pi}{4}$. Damit ist der Integralwert aus der Aufgabe $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, wie zu zeigen war.

$\mathcal{J.F.B.}$