Frühjahr 13 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$.

a) Sei $h : D(0{,}2) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $h(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$.

i) Zeigen Sie, dass

$$h^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2) \text{ und alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

ii) Folgern Sie aus (i) die Beziehung

$$\overline{h(z)} = h(\overline{z}) \qquad \text{für alle } z \in D(0{,}2).$$

iii) Gelte zusätzlich $h(iy) \in \{it : t \in \mathbb{R}\}$ für alle $y \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$. Dann ist

$$h(-z) = -h(z) \qquad \text{für alle } z \in D(0{,}2).$$

Beweisen Sie diese Gleichung!

b) Sei $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(a) = 0$ und $|f(z)| \le 5$ für alle $z \in D(a,r)$.

i) Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung von $D(0{,}1)$ auf $D(a,r)$.

ii) Zeigen Sie, dass

$$|f(z)| \le \frac{5}{r} \cdot |z-a| \qquad \text{für alle } z \in D(a,r) \text{ gilt.}$$

Lösungsvorschlag:

a) i) Weil h holomorph auf $D(0{,}2)$ ist, können wir für jedes $x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$ und irgendeine Folge mit Grenzwert x die zugehörigen Differenzenquotienten betrachten. Wir wählen ganz speziell eine reellwertige Folge, z. B. $x_n := x + \frac{1}{n}$. Für n groß genug liegt $x_n \in D$ und konvergiert gegen x. Dies liefert

$$h'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n) - h(x)}{x - x_n} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R},$$

also, dass $h'(x)$ ein Grenzwert einer reellwertigen Folge ist (hier geht $h(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$ ein) und somit selbst reell ist, da $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
Damit ist die Aussage für $n = 1$ gezeigt, für allgemeines n folgt die Aussage nun durch Induktion:
Anfang $n = 1$: Wurde gerade bewiesen.
Annahme $n \in \mathbb{N}$: Die zu zeigende Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Schritt $n \mapsto n+1$: Die Funktion $h^{(n)}$ ist holomorph auf $D(0{,}2)$ und erfüllt per Annahme $h^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$. Nach dem Induktionsanfang folgt auch $h^{(n+1)}(x) = (h^{(n)})'(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R} \cap D(0{,}2)$. Also stimmt die Aussage auch für $n+1$.
Nach dem Prinzip vollständiger Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Wir entwickeln h in eine Potenzreihe um 0, die für $|z| < 2$ konvergiert. Nach dem Satz von Taylor ist $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n$ für alle $z \in D(0,2)$ und mit der Stetigkeit und $\mathbb{R}$-Linearität der komplexen Konjugation, sowie $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{R}$ nach i) folgt

$$\overline{h(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \overline{z}^n = h(\overline{z}) \quad \text{für alle } z \in D(0,2).$$

iii) Die Funktion $g : D(0,2) \to \mathbb{C},\ g(z) := h(-z) + h(z)$ ist holomorph und für $z = it, t \in (-2,2)$ gilt

$$g(z) = h(-it) + h(it) = h(\overline{it}) + h(it) = \overline{h(it)} + h(it) = -h(it) + h(it) = 0,$$

weil $\overline{it} = -it$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Demnach häufen sich die Nullstellen von g in 0 und g ist nach dem Identitätssatz konstant 0 auf dem Gebiet $D(0,2)$. Daraus folgt $h(-z) = -h(z)$ für alle $z \in D(0,2)$ wie behauptet.

b) i) Die Funktion $g(z) := a + rz$ ist ganz und bijektiv mit Inversem $g^{-1}(z) = \frac{1}{r}(z-a)$. Es gilt

$$g(z) \in D(a,r) \iff |g(z) - a| < r \iff r|z| < r \iff |z| < 1 \iff z \in D(0,1),$$

also ist $g : D(0,1) \to D(a,r)$ biholomorph.

ii) Wir betrachten die Funktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z-a}, & z \in D(a,r),\ z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}.$$

Diese ist holomorph auf $D(a,r)$; für $z \neq a$ ist dies klar und für $z = a$ folgt dies aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, der Definition der komplexen Ableitung und $f(a) = 0$. Sei nun $0 < s < r$ beliebig, dann nimmt g nach dem Maximumsprinzip das Betragsmaximum auf dem Gebiet $D(a,s)$ am Rand an. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| = s$ gilt $|g(z)| = |\frac{f(z)}{z-a}| \leq \frac{5}{s}$. Im Grenzübergang $s \to r$ folgt $|g(z)| \leq \frac{5}{r}$ für alle $z \in D(a,r)$. Umstellen liefert $|f(z)| = |g(z)| \cdot |z-a| \leq \frac{5}{r} \cdot |z-a|$.
(Dies ist eine Anpassung vom Beweis des Schwarzschen Lemmas. Man hätte auch die Funktion $\frac{1}{5} f \circ g$ mit g aus i) betrachten können und direkt das Schwarzsche Lemma anwenden können. Daraus würde $|\frac{1}{5} f(g(z))| \leq |z|$ und $|f(z)| \leq 5|g^{-1}(z)| = \frac{5}{r} \cdot |z-a|$ folgen.)

J.F.B.