**Frühjahr 13 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Eine Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet:
*Seien* $(X,d)$ *metrischer Raum,* $\emptyset \neq A \subset X$ *und* $T : A \to X$ *mit*
*(1)* $T(A) \subset A$ *(2)* $A$ *abgeschlossen* *(3)* $T$ *Kontraktion* *(4)* $(X,d)$ *vollständig.*
Dann besitzt $T$ genau einen Fixpunkt.

a) Erklären Sie die in der Formulierung des Satzes auftretenden Voraussetzungen

   i) $T$ ist Kontraktion

   ii) der metrische Raum $(X,d)$ ist vollständig.

b) Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

   Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Im Folgenden betrachten wir das **Anfangswertproblem**

$$x' = f(t,x); \quad x(t_0) = x_0.$$

c) Formulieren Sie die Picard-Lindelöf Bedingung an $f$, d. h. die Voraussetzungen an $f$, unter denen mit dem Satz von Picard-Lindelöf auf die (lokale) Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems geschlossen werden kann.

d) Erläutern Sie kurz, wie man die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems unter der Voraussetzung der Picard-Lindelöf Bedingung aus dem Banachschen Fixpunktsatz schließen kann. Gehen Sie hierbei insbesondere darauf ein, wie das Anfangswertproblem in eine äquivalente Fixpunktgleichung umformuliert werden kann und warum die Picard-Lindelöf Bedingung den Nachweis der Kontraktionseigenschaft ermöglicht.

**Lösungsvorschlag:**

a) i) $T$ heißt Kontraktion, wenn es ein $q \in [0,1)$ gibt, sodass $d(Tx, Ty) \leq q d(x,y)$ für alle $x, y \in A$ gilt.

   ii) $(X,d)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in $X$, also jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, die

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

   erfüllt gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert, also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(x_n, x) < \varepsilon$$

   erfüllt.

b) Seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Fixpunkte von $T$, dann ist $d(x,y) = d(Tx, Ty) \leq q d(x,y)$. Wegen $d(x,y) > 0$ folgt $1 \leq q$, ein Widerspruch. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt höchstens einen Fixpunkt.

c) Es gebe zwei reelle Zahlen $a, b > 0$, sodass $f$ stetig und lipschitzstetig bezüglich $x$ auf der Menge $M := [t_0 - a, t_0 + a] \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x_0 - x| \leq b\}$ ist, wobei diese Teilmenge von $D$ sei, also zudem $M \subset D$ gelte.

d) Eine stetige Funktion $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ mit $\delta > 0$ ist, nach dem HDI, genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn sie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))\ \mathrm{d}t,\ \ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

erfüllt, also Fixpunkt der weiter unten definierten Funktion $T$ ist.
Wir betrachten den Banachraum, insbesondere also vollständigen metrischen Raum, der stetigen $\mathbb{R}^n$-wertigen Funktionen auf $[t_0 - a, t_0 + a]$, also den Raum

$$(X, d) = (C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$$

mit der Maximumsnorm, und die abgeschlossenen Teilmenge

$$A_\delta = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}).$$

Wir betrachten weiter die Funktion

$$T : A_\delta \to X,\ \text{ mit } T(g) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))\ \mathrm{d}s \text{ für alle } g \in A_\delta.$$

Durch Wahl von $\delta$, sodass

$$\delta \leq \frac{1}{2L},\ \delta \leq a \text{ und } \delta \leq \frac{b}{\max\{|f(t,x)| : (t,x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}\}}$$

gelten, kann erzielt werden, dass

$$T \text{ eine (wohldefinierte) Kontraktion mit } T(A_\delta) \subset A_\delta \subset D$$

ist. Dann sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und $T$ besitzt einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser stellt eine Lösung des Anfangswertproblems dar.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$