Frühjahr 13 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -u' - \frac{5}{2}u.$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xy''(x) + \frac{1+\sqrt{x}}{2}y'(x) + \frac{5}{8}y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Durch die Substitution $y(t^2) = u(t)$ $(t > 0)$ geht die Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung an.

Lösungsvorschlag:

a) Diese Differentialgleichung ist äquivalent zu $u'' + u' + \frac{5}{2}u = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet $x^2 + x + \frac{5}{2}$, welches die Nullstellen $\frac{-1\pm 3i}{2}$ besitzt. Daher lautet die allgemeine reelle Lösung $u(t) = ae^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{3}{2}t) + be^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{3}{2}t); a, b \in \mathbb{R}$.

b) Für $u(t) = y(t^2)$ gilt $u'(t) = 2ty'(t^2)$ und $u''(t) = 2y'(t^2) + 4t^2y''(t^2)$. Mittels der Substitution $x = t^2 > 0$ $(t > 0)$ wird aus der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 = t^2y''(t^2) + \frac{1+t}{2}y'(t^2) + \frac{5}{8}y(t^2) &= \frac{1}{4}(4t^2y''(t^2) + 2y'(t^2) + 2ty'(t^2) + \frac{5}{2}y(t^2)) \\ &= \frac{1}{4}(u''(t) + u'(t) + \frac{5}{2}u(t)), \end{aligned}$$

also $u'' = -u' - \frac{5}{2}u$. Nach a) ist also $u(t) = ae^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{3}{2}t) + be^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{3}{2}t)$ und für $t > 0$ ist $y(t) = ae^{-\frac{\sqrt{t}}{2}}\cos(\frac{3}{2}\sqrt{t}) + be^{-\frac{\sqrt{t}}{2}}\sin(\frac{3}{2}\sqrt{t})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$