Frühjahr 13 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + L\, y(x) = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\ . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, dass (1) eine Lösung $y :]-1{,}1[\to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Ist die Lösung aus (a) auf]-1,1[eindeutig bestimmt?
Hinweis zu a): Bestimmen Sie zunächst durch formale Differentiation der Potenzreihe die Koeffizienten c_j. Untersuchen Sie dann den Konvergenzradius der so definierten Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die formale Differentiation nun gerechtfertigt?

Lösungsvorschlag:

a) Formale (gliedweise) Differentiation liefert $y'(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}x^j$ und $y''(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)c_{j+2}x^j$. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so folgt:

$$\begin{aligned}0 &= (1-x^2)\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)c_{j+2}x^j - 2x\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}x^j + L\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j \\ &= 2c_2 + Lc_0 + (6c_3 - 2c_1 + Lc_1)x + \sum_{j=2}^{\infty}((j+2)(j+1)c_{j+2} - j(j-1)c_j - 2jc_j + Lc_j)x^j\end{aligned}$$

und aus der Anfangsbedingung erhalten wir $c_0 = 0, c_1 = 1$.
Durch Koeffizientenvergleich folgern wir $c_2 = 0, c_3 = \frac{2-L}{6}$ und $c_{j+2} = \frac{j(j-1)c_j + 2jc_j - Lc_j}{(j+2)(j+1)}$ für $j \geq 2$. Induktiv folgt $c_{2j} = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und durch Umformung folgt $c_{j+2} = \frac{j^2+j-L}{j^2+3j+2}c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dies führt auf $y(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}x^{2j+1}$.
Wir müssen als Nächstes den Konvergenzradius der Potenzreihe untersuchen. Wir würden dafür gern das Quotientenkriterium verwenden; dies ist aber nicht möglich, weil jeder zweite Koeffizient verschwindet. Wir verwenden daher einen Trick:
Falls es ein $j \in \mathbb{N}_0$ gibt, für das $c_{2j+1} = 0$ ist, so folgt auch $c_k = 0$ für alle $k \geq 2j+1$ per Induktion. In diesem Fall bricht die Potenzreihe ab und der Konvergenzradius ist ∞. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $j^2 + j - L = 0$ gibt.
Falls $j^2 + j \neq L$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, folgt induktiv $c_{2j+1} \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten in diesem Fall die Potenzreihe $z(x) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_jx^j$ mit $a_j := c_{2j+1}$ und untersuchen deren Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium. Dies ist möglich, weil wir voraussetzen, dass keiner der Koeffizienten 0 ist. Für $j \geq 2$ folgt

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} = \frac{c_{2j+1}}{c_{2j+1+2}} = \frac{(2j+1)^2 + 3(2j+1) + 2}{(2j+1)^2 + (2j+1) - L} = \frac{(2+\frac{1}{j})^2 + \frac{6}{j} + \frac{5}{j^2}}{(2+\frac{1}{j})^2 + \frac{2}{j} + \frac{1-L}{j^2}} \xrightarrow{j\to\infty} \frac{2^2}{2^2} = 1.$$

Beachte, dass der Nenner per Annahme nicht verschwindet und wir $c_{2j+1} \neq 0$ kürzen dürfen, nachdem wir die Rekursionsformel für c_{j+2} einsetzen ($j \geq 2 \implies 2j+1 \geq 2$).
Nach dem Quotientenkriterium beträgt der Konvergenzradius von z also 1 und für alle $x \in (-1{,}1)$ konvergiert diese Reihe absolut. Für diese x folgt auch $x^2 \in (-1{,}1)$ und daher die Konvergenz von $xz(x^2)$.

Wir rechnen nach, dass $xz(x^2) = x\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}x^{2j+1} = y(x)$ gilt, also konvergiert y für alle $x \in (-1,1)$. Weil Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis kompakt konvergieren, dürfen wir diese gliedweise differenzieren und folgern, dass $y :]-1,1[\to \mathbb{R}, y(x) := \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}x^{2j+1}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

(Statt die Potenzreihe $z(x)$ zu betrachten, kann man auch direkt versuchen die Konvergenz von $y(x)$ für $|x| < 1$ zu zeigen. Dazu kann man in etwa so vorgehen:
Weil $\frac{j^2+j-L}{j^2+3j+2}$ für $j \to \infty$ gegen 1 konvergiert, können wir für jedes $K > 1$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass $j \geq j_0 \implies \frac{j^2+j-L}{j^2+3j+2} < K$. Daraus folgt dann $|c_{j+2}| \leq K|c_j|$ und $|c_{j_0+2k}| \leq K^k|c_{j_0}|$. Dies kann man benutzen, um mit dem Majorantenkriterium Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{K}$ zu folgern. Weil $K > 1$ beliebig wählbar ist, kann man damit Konvergenz für alle $x \in (-1,1)$ beweisen.)
Tatsächlich divergiert die Reihe auch für $|x| > 1$, dies war aber nicht gefragt und ist für die Lösung der Aufgabe unerheblich, genauso das Randverhalten.

b) Ja die Lösung ist eindeutig. Wir können das Anfangswertproblem mittels $u_1 = y, u_2 = y'$ nämlich in eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= \frac{2tu_2(t) - Lu_1(t)}{1-t^2} \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $u_1(0) = 0, u_2(0) = 1$ umformulieren. Die Strukturfunktion dieser Differentialgleichung ist auf $(-1,1)$ (wegen $1 - t^2 \neq 0$) stetig differenzierbar und daher lokal lipschitzstetig. Die Eindeutigkeit der Lösung auf $(-1,1)$ folgt nun aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$