Frühjahr 13 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$?

b) Bestimmen Sie für jedes solche Paar (a, b) den Imaginärteil aller zugehörigen holomorphen Funktionen.

Lösungsvorschlag:

a) Damit u Realteil einer holomorphen Funktion ist, muss u harmonisch sein, also $2 + 2b = 0$ erfüllen. Dies liefert $b = -1$. Für jedes Paar $(a, -1)$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $v(x, y) = ay^2 + 2xy - ax^2$ eine mögliche Wahl für den Imaginärteil, weil dann $\partial_x u(x, y) = 2x + 2ay = \partial_y v(x, y)$ und $\partial_y u(x, y) = 2ax - 2y = -\partial_x v(x, y)$ ist, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen also erfüllt sind. Also lautet die Antwort für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b = -1$ und für keine anderen Werte für b.

b) Ein Beispiel für den Imaginärteil haben wir in b) gesehen. Alle anderen erhält man durch Addition einer reellen Konstante. Ist nämlich $z(x, y)$ eine weitere Wahl, also ist $u(x, y) + iz(x, y)$ holomorph, so folgt, dass $u(x, y) + iv(x, y) - (u(x, y) + iz(x, y)) = i(v - z)(x, y)$ holomorph ist. Weil der Realteil konstant ist, kann dies nur möglich sein, wenn auch die Funktion und damit der Imaginärteil konstant ist, d. h. wenn $v - z \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt. Damit sind die gesuchten Imaginärteile für $a \in \mathbb{R}$ und $b = -1$ genau die Funktionen $v_c(x, y) = ay^2 + 2xy - ax^2 + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$