Frühjahr 13 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei das (autonome) System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y + 3,\\ \dot{y} &= x^2 - 4y - 20\end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

a) Falls die erste Zeile 0 ergibt, folgt $y = 3 - x$. Eingesetzt in die untere Zeile erhält man $x^2 + 4x - 32 = 0$, also $x \in \{-8{,}4\}$. Mit $y = 3 - x$ erhalten wir also, dass die stationären Punkte genau die Punkte $(-8{,}11)$ und $(4, -1)$ sind.

b) Die Jacobimatrix der Strukturfunktion lautet $J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2x & -4 \end{pmatrix}$.
Für $(-8{,}11)$ erhalten wir also die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}$ mit Determinante $-12 < 0$. Diese Matrix ist daher indefinit und der zugehörige stationäre Punkt ist instabil, weil ein Eigenwert mit positivem Realteil existiert.
Für $(4, -1)$ erhalten wir $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $\lambda^2 + 5\lambda + 12$, dessen Nullstellen durch $\frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2}$ gegeben sind. Diese entsprechen den Eigenwerten, woraus folgt, dass jeder Eigenwert negativen Realteil hat. Daher ist $(4, -1)$ asymptotisch stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$