Frühjahr 13 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie Lage und Ordnung der Pole der meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

c) Geben Sie die Laurent-Reihe in einem der beiden Pole an.

Lösungsvorschlag:

a) Wegen $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2(z - i)^2$ liegen die Pole von f bei i und $-i$. Beide sind von zweiter Ordnung.

b) Dieses Integral existiert, weil der Integrand stetig ist (der Nenner besitzt keine reelle Nullstelle) und der Nennergrad (hier 4) um mindestens zwei größer ist als der Nennergrad (hier 0). Daher können wir das Integral, fortan mit I bezeichnet, als $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x$ berechnen.
Diese Integrale entsprechen Wegintegralen über f längs der Pfade $\gamma_R^1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$. Um den Residuensatz anwenden zu können erweitern wir diese zu geschlossenen Kurven γ_R, indem wir den Weg längs des oberen Halbkreises um 0 mit Radius R hinzunehmen, d. h. indem wir die Wege $\gamma_R^2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$ anhängen. Die so entstandenen Wege sind geschlossen, stückweise stetig differenzierbar und verlaufen für $R > 1$ durch keinen Pol von f. Nach dem Residuensatz ist $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Res}_f(i)$, weil i einmal in positiver Richtung und $-i$ gar nicht von γ_R umschlossen wird.
Um das Residuum zu berechnen, nutzen wir die Formel für Pole und erhalten $\mathrm{Res}_f(i) = (f(z)(z - i)^2)'(i) = \frac{-2}{(i+i)^3} = \frac{1}{4i}$. Also ist $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$.
Wir schätzen den Beitrag von γ_R^2 zum Integral ab. Für $|z| = R$ und genügend großes R gilt $|f(z)| \leq \frac{1}{R^4 - 2R^2 - 1}$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung. Die Länge von γ_R^2 beträgt πR. Nach der Standardabschätzung gilt $\int_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z \leq \frac{\pi R}{R^4 - 2R^2 - 1}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Insgesamt folgt $I = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

c) Auch wenn nur die Laurentreihe in einem Pol gefragt ist, geben wir die Reihen für beide Pole an. Mit der Anwendung des Cauchyprodukts auf die geometrische Reihe folgt für $|z| < 1$, dass $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{k=0}^{n} 1) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + 1) z^n$ ist.

Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(z-i+2i)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(2i(1+\frac{z-i}{2i}))^2} \\
&= -\frac{1}{4(z-i)^2}\frac{1}{(1-\frac{i}{2}(z-i))^2} \\
&= \frac{i^2}{(2(z-i))^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)i^n}{2^n}(z-i)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)i^{n+2}}{2^{n+2}}(z-i)^{n-2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(z+i-2i)^2} &= \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(-2i(1-\frac{z+i}{2i}))^2} \\
&= -\frac{1}{4(z+i)^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2i}(z+i))^2} \\
&= \frac{i^2}{(2(z+i))^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2i)^n}(z+i)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}i^{n-2}}(z+i)^{n-2}
\end{aligned}
$$

jeweils für $|z \pm i| < 2$, weil $|\frac{i}{2}(z-i)| = \frac{|z-i|}{2} = |\frac{z+i}{2i}|$ ist.
Wir erhalten auch aus der Laurentdarstellung $\mathrm{Res}_f(\pm i) = \pm\frac{1}{4i}$ im Einklang mit b).

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$