Frühjahr 13 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(z) = e^z + 3z^5$ in der offenen Einheitskreisscheibe $E := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$. Zeigen Sie weiter, dass genau zwei verschiedene dieser Nullstellen positiven Imaginärteil haben und eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ liegt.

Lösungsvorschlag:

Es gilt $e < 3$ und $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{C}$. Für alle $z \in \partial E$ gilt daher

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e^{|z|} = e^1 = e < 3 = |3z^5|.$$

Daher hat f keine Nullstelle auf dem Rand von E und nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit von f in E mit der Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit von $g(z) = 3z^5$ in E überein, beträgt also genau 5.
Wir betrachten als Nächstes die Einschränkung von f auf $[-1,1]$. Dort ist f stetig, differenzierbar im Inneren und reellwertig mit $f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0$ und $f(1) = e + 3 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (oder nach Bolzanos Nullstellensatz) gibt es mindestens eine Nullstelle von f in (-1,1). Wegen $f'(z) = e^z + 15z^4 \geq e^z > 0$ auf (-1,1) ist f dort streng monoton wachsend und daher injektiv. Es kann also höchstens eine reelle Nullstelle in (-1,1) liegen und damit gibt es genau eine.
(Die Aufgabenstellung ist hier nicht absolut klar definiert, deswegen haben wir zur Sicherheit die Eindeutigkeit der reellen Nullstelle gezeigt. Weil $f'(z) \geq e^z > 0$ sogar auf $\mathbb{R}$ gilt, gibt es auch auf ganz $\mathbb{R}$ höchstens eine, und damit genau eine Nullstelle. Diese liegt in (-1,1).)
Falls $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f ist, so folgt $f(\overline{z}) = e^{\overline{z}} + 3(\overline{z})^5 = \overline{e^z + 3z^5} = \overline{0} = 0$, also ist dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle. Durch Entwicklung in Potenzreihen um z und $\overline{z}$ sieht man, dass die Ordnungen dieser beiden übereinstimmen. Daraus folgt, dass f entweder je eine doppelte Nullstelle mit positivem und negativem Imaginärteil hat, oder, dass f je zwei einfache Nullstellen mit positivem und negativem Imaginärteil hat.
Gäbe es eine doppelte Nullstelle z_0 von f, so wäre auch $f'(z_0) = 0$, also $e^{z_0} + 3z_0^5 = 0 = e^{z_0} + 15z_0^4$, was wiederum auf $3z_0^4(z_0 - 5) = 0$, also $z_0 = 0$ oder $z_0 = 5$ führen würde. $z_0 = 0$ ist aber keine Nullstelle von f, da $f(0) = 1$ ist, und 5 liegt nicht in E. Damit muss jede der Nullstellen von f in E einfach sein und es muss genau zwei verschiedene Nullstellen von f mit positivem Imaginärteil in E geben.

$\mathcal{J.F.B.}$