Frühjahr 13 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
>
> b) Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung der 0, sodass $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Lösungsvorschlag:

a) Dies sind genau die konstanten Funktionen $f \equiv c$ mit $|c-3| \geq 1$. Dass jede derartige konstante Funktion ganz ist und $|f(z)-3| \geq 1$ erfüllt ist klar. Für die Rückrichtung bemerken wir, dass eine solche ganze Funktion $f(z) - 3 \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt und, dass daher die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{f(z)-3}$ ganz ist. Außerdem gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{1} = 1$, d. h. g ist beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $g(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $c \in \mathbb{C}$ die Eigenschaft $|c| \leq 1$ hat. Dies führt durch Umformungen auf $f(z) = 3 + \frac{1}{c}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und es ist $f \equiv 3 + \frac{1}{c}$, wobei $|3 + \frac{1}{c} - 3| = \frac{1}{|c|} \geq 1$ erfüllt ist.

b) Nein, gibt es nicht. Wäre f eine solche Funktion, so müsste die Potenzreihenentwicklung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ auf einer offenen Kreisscheibe um 0 gegen f konvergieren. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist nach der Formel von Cauchy-Hadamard aber durch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2(n+1)}}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n+1}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = e^{-2} \cdot 0 = 0$$

gegeben. Damit konvergiert die Reihe nur in 0, was einen Widerspruch liefert und die Annahme, es gäbe eine derartige Funktion f, widerlegt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$