F12T3A5

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems

$$x' = Ax$$

Lösung:

$$\det(A - \mu E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\mu & -1 & 1 \\ 1 & 1-\mu & 0 \\ 1 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix}$$

$$= (1-\mu)(1-\mu)^2 + (1+\mu) - (1+\mu) = (1-\mu)(1+\mu)$$

$\Rightarrow$ 1 Eigenwert mit algebraischen Vielfachheit 1
$\Rightarrow$ -1 Eigenwert mit algebraischen Vielfachheit 2

$$A - (-E_3) = A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eig$(A, -1)$=ker$(A + E_3)$ = lin$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ($\Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar)

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eig$(A, 1)$=ker$(A - E_3)$ = lin$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

ker $\left((A+E_3)^2\right)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eig$(A, -1, 2)$=ker $\left((A+E_3)^2\right)$ = lin$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Eig}(A, -1, 2) \setminus \text{Eig}(A, 1) \Rightarrow (A + E_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$$

Noch zu Ende rechnen und Fundamentalsystem aufschreiben!