Frühjahr 12 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $v : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ der Vektor $v(x)$ auf x senkrecht steht (für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$).

a) Man zeige, dass eine stetig differenzierbare Funktion $E : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, für die $E(x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ nur von der Norm von x abhängt, ein erstes Integral der Differentialgleichung $x' = v(x)$ ist. (Das heißt, die Ableitung von E verschwindet längs des Vektorfeldes v; also $dE(x)(v(x)) = 0$.)

b) Welche Konsequenzen hat die Aussage in (a) für die Phasenkurven der Differentialgleichung $x' = v(x)$?

Lösungsvorschlag:

a) Falls E stetig differenzierbar ist und nur von der Norm abhängt, gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $r : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $E(x) = r(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Wir folgern $\partial_j E(x) = r'(\|x\|) \cdot \frac{x_j}{\|x\|}$ nach der Kettenregel für $j = 1, ..., n$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Daher ist

$$dE(x)(v(x)) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j E(x) v(x)_j = \frac{r'(\|x\|)}{\|x\|} \sum_{j=1}^{n} x_j v_j(x) = \frac{r'(\|x\|)}{\|x\|} (x \cdot v(x)) = 0$$

nach der Voraussetzung, dass $v(x)$ senkrecht auf x steht. Dies war zu zeigen.

b) Weil E ein erstes Integral von $x' = v(x)$ ist, ist E konstant auf allen Phasenkurven der Differentialgleichung $x' = v(x)$. Insbesondere ist E eine Lyapunovfunktion.
Wir wählen jetzt speziell $E(x) := \|x\|$, dann muss E längs aller Phasenkurven konstant sein. Insbesondere verläuft jede Phasenkurve in der Oberfläche einer um 0 zentrierten Sphäre und ist daher beschränkt.
Ohne weitere Informationen über v sind keine weiteren Aussagen möglich; falls v sogar stetig und lokal lipschitzstetig ist, können wir allerdings folgern, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $x' = v(x), x(t_0) = x_0$ genau eine maximale Lösung besitzt, welche auf $\mathbb{R}$ definiert, beschränkt und stabil ist und deren Norm konstant ist. Im Falle $n = 1$ folgt daraus schon $v \equiv 0$ und $x \equiv x_0$.
Wir halten abschließend fest, dass es (für $n \neq 1$) tatsächlich Vektorfelder gibt, die $v(x) \cdot x \equiv 0$ erfüllen, ohne stetig zu sein. Auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist die Funktion $v(x, y) := (-y, x)$ für $(0,0) \neq (x, y) \neq (1,1); v(1,1) = (1, -1)$ unstetig, da $v(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = (-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ gegen $(-1,1) \neq (1, -1) = v(1,1)$ konvergiert, wenn $n \to \infty$ strebt, obwohl $(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ gegen $(1,1)$ konvergiert. Trotzdem gilt $v(1,1) \cdot (1,1) = 0$ und $v(x, y) \cdot (x, y) = 0$, also steht $v(x)$ senkrecht auf x. Ein analoges Beispiel existiert für $n \geq 3$.

J.F.B.