Frühjahr 12 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Für ein $p \in \Omega$ existiere eine Lösung $\gamma :]a, \infty[\to \Omega$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = p$. Man zeige, dass dann p eine Ruhelage sein muss (d.h. $f(p) = 0$).

Lösungsvorschlag:

Angenommen p wäre keine Ruhelage, d. h. es gilt $f(p) \neq 0$. Weil f ein stetiges Vektorfeld ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|y - p\| < \delta \implies \|f(y) - f(p)\| < \frac{\|f(p)\|}{2}$, woraus insbesondere $\|f(y)\| > \frac{\|f(p)\|}{2}$ folgt.
Weil $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = p$ ist, finden wir ein $C > a$ mit $t > C \implies \|\gamma(t) - p\| < \delta$. Insbesondere gilt $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \le \|\gamma(t) - p\| + \|\gamma(s) - p\| < 2\delta$ für alle $C < s < t$.
Für alle $C < s < t$ gilt

$$\begin{aligned}\gamma(t) - \gamma(s) = \int_s^t \gamma'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_s^t f(\gamma(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x + \int_s^t f(p)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x + f(p)(t-s).\end{aligned}$$

Für $C < s < x < t$ ist $\|\gamma(x) - p\| < \delta$ und $\|f(\gamma(x)) - f(p)\| < \frac{\|f(p)\|}{2}$, also folgt $\left\|\int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x\right\| \le (t-s)\frac{\|f(p)\|}{2}$ und

$$\begin{aligned}\left\|\int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x + f(p)(t-s)\right\| &\ge \left|\left\|\int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x\right\| - \|f(p)(t-s)\|\right| \\ &= \|f(p)\|\,(t-s) - \left\|\int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x\right\| \ge \frac{\|f(p)\|}{2}(t-s)\end{aligned}$$

durch Anwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung.
Wir lassen jetzt $s > C$ fest und wählen $t > \frac{5\delta}{\|f(p)\|} + s$, dann ist

$$2\delta > \|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \left\|\int_s^t (f(\gamma(x)) - f(p))\,\mathrm{d}x + f(p)(t-s)\right\| \ge \frac{\|f(p)\|}{2}\frac{5\delta}{\|f(p)\|} = \frac{5}{2}\delta,$$

ein Widerspruch zu $\delta > 0$ und $2 < \frac{5}{2}$.
Demnach war die Annahme falsch und es gilt $f(p) = 0$, p ist also eine Ruhelage.

$\mathcal{J.F.B.}$