Frühjahr 12 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f(z) := \frac{1}{(z-1)(2-z)}$, für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{1+0i, 2+0i\}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0{,}2\pi])$, wobei $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag:

a) Es ist $f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{1{,}2\}$. Für $|z| < 1$ gilt auch $|\frac{z}{2}| < 1$ und wir können die obige Darstellung in zwei geometrische Reihen entwickeln. Es gilt also

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\right) z^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

mit dem Cauchyprodukt und der geometrischen Summenformel. Da die Taylorreihendarstellung eindeutig ist und hier eine lokal konvergente Potenzreihe vorliegt, die auf $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ mit f übereinstimmt, handelt es sich hier bereits um die Taylorreihe.

b) Es ist $f(z) = -\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{1{,}2\}$. Für $1 < |z| < 2$ gilt $|\frac{z}{2}| < 1$ und $|\frac{1}{z}| < 1$ und wir können obige Darstellungen wieder in zwei geometrische Reihen entwickeln. Es gilt also

$$f(z) = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^n}.$$

Mit dem Cauchyprodukt ließ sich diese Darstellung wieder umschreiben. Dass es sich um die Laurentreihe handelt, kann analog zu a) begründet werden.

c) Es ist $f(z) = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{1{,}2\}$. Für $|z| > 2$ gilt $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|\frac{2}{z}| < 1$ und wir können obige Darstellungen wieder in zwei geometrische Reihen entwickeln. Es gilt also

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - 2^{n+1})z^{-n-2}.$$

Weitere Umformungen wurden hier wie in b) mit dem Cauchyprodukt durchgeführt. Dass es sich um die Laurentreihe handelt wird wieder wie in a) (oder b)) begründet.

d) Für jedes Paar $(a, b) \in (1,2)^2$ ist die Kurve γ geschlossen und stetig differenzierbar, sie verläuft in $\mathbb{C}\backslash\{1,2\}$, windet sich einmal in positivem Sinn um 1 und gar nicht um 2. Weil $\mathbb{C}$ offen und konvex und $\{1,2\}$ endlich ist, ist der Residuensatz anwendbar und besagt, dass das gesuchte Integral durch $2\pi i \operatorname{Res}_1(f)$ gegeben ist. Das Residuum bestimmen wir mit der Polformel, da 1 ein Pol erster Ordnung von f ist (einfache Nullstelle des Nenners, keine Nullstelle des Zählers). Wir erhalten $\operatorname{Res}_1(f) = 1$ und das Integral beträgt $2\pi i$.

$\mathcal{J.F.B.}$