Frühjahr 12 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $\gamma(t) := 2e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$.
>
> a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\mathrm{d}z$
>
> b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}\mathrm{d}z$
>
> c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion $f(z) := \frac{z}{9-z^2}$ ist auf der offenen, konvexen Menge $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$ holomorph. Die Kurve γ ist geschlossen, stetig differenzierbar und verläuft vollständig in D. Weil $-i$ nicht in der Spur von γ liegt, sondern einmal gegen den Uhrzeigersinn umwunden wird, ist Cauchys Integralformel anwendbar und liefert

$$\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-(-i)}\mathrm{d}z = 2\pi i f(-i)\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma) = \frac{\pi}{5}.$$

b) Die Funktion $g(z) := \frac{5z-2}{z(z-1)}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0{,}1\}$, $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und $\{0{,}1\}$ ist endlich. Die Kurve γ ist geschlossen, stetig differenzierbar und verläuft vollständig in $\mathbb{C}\backslash\{0{,}1\}$. Der Residuensatz ist also anwendbar.
Beide Singularitäten von g werden je einmal gegen den Uhrzeigersinn umwunden. Es handelt sich um Pole erster Ordnung, weil es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt, bei denen der Zähler keine Nullstelle besitzt. Die Residuen betragen nach der Polformel $\mathrm{Res}_z(g) = \frac{5z-2}{2z-1}$ für $z = 0{,}1$. Der Residuensatz besagt nun

$$\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{-2}{-1} + \frac{3}{1}\right) = 10\pi i.$$

c) Die Funktion $h(z) := e^{-z}$ ist holomorph auf dem Gebiet $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, in welchem die Wege γ und $\Gamma := 1 + \gamma$ homolog sind, weil die Windungszahl beider Wege um 1 gleich ist und 1 beträgt. Unter Verwendung der Taylorformel und $h'(1) = -e^{-1}$ erhalten wir

$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{h(z)}{(z-1)^{1+1}}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{h'(1)}{1!} = \frac{-2\pi i}{e}.$$

$\mathcal{J.F.B.}$