Frühjahr 12 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$.

b) Zeigen Sie, dass 0 eine stabile stationäre Lösung des Systems $\dot{x} = Ax$ ist.

c) Geben Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften an:

   i) $\dot{x} = Ax$ ist die Linearisierung der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ um $x = 0$.

   ii) 0 ist eine instabile stationäre Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

Lösungsvorschlag:

a) Die ersten beiden Gleichungen $x_1'(t) = x_2(t); x_2'(t) = -x_1(t)$ hängen nicht von x_3 ab. Es ist leicht zu sehen, dass die allgemeine Lösung die Form $(a\cos(t) + b\sin(t), b\cos(t) - a\sin(t))$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ist, und dass die Anfangsbedingung genau für $a = 0, b = 2$ gelöst wird.
Die Lösung hat also die Form $(2\sin(t), 2\cos(t), x_3(t))$, wobei $x_3'(t) = 2\sin(t) - x_3(t)$ und $x_3(0) = -1$ erfüllt. Wir probieren den Ansatz $x_3(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ und erhalten aus der Differentialgleichung, dass $b = -a$ und $-a = 2 - b$ gelten, woraus $a = -1$ und $b = 1$ folgen. Tatsächlich ist $x_3(t) = \sin(t) - \cos(t)$ auch eine Lösung des Hilfsproblems. Die Lösung des gestellten Anfangswertproblems ist daher $x(t) = (2\sin(t), 2\cos(t), \sin(t) - \cos(t))$.

b) Die charakteristische Gleichung von A lautet $0 = (-1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$, was genau die Lösungen $\lambda = -1, \lambda = i$ und $\lambda = -i$ besitzt. Jeder Eigenwert hat also nichtpositiven Realteil und bei denjenigen Eigenwerte deren Realteil 0 ist, stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein (beide bei beiden 1). Aus der allgemeinen Theorie folgt die Stabilität der Nulllösung. Dass 0 eine stationäre Lösung ist, ist klar. (Weil $\pm i$ verschwindende Realteile haben, ist 0 nicht attraktiv und nicht asymptotisch stabil.)

c) Wir betrachten die Funktion $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 + y \\ y^3 - x \\ x - z \end{pmatrix}$. Als Polynomfunktion ist diese unendlich oft differenzierbar. Man erkennt sofort, dass $f(0{,}0{,}0) = (0{,}0{,}0)$ ist, die 0 also eine Ruhelage ist. Die Jacobimatrix von f ist $Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 & 0 \\ -1 & 3y^2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, was für $(x, y, z) = (0{,}0{,}0)$ mit A übereinstimmt. Also ist $x' = Ax$ die Linearisierung von $x' = f(x)$ um 0. Es verbleibt einzig die Instabilität der 0 zu zeigen.

Wir betrachten zunächst das System $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y \\ y^3 - x \end{pmatrix}$ und werden zeigen, dass 0 eine instabile Ruhelage ist. Die Funktion $L(x, y) := -x^2 - y^2$ ist wegen $\nabla V(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x^3 + y \\ y^3 - x \end{pmatrix} = -2x^4 - 2y^4 < 0$ für $(x, y) \neq (0{,}0)$ eine strikte Lyapunovfunktion. (0,0) ist kein Minimum von L, weil $L(0{,}0) = 0 > L(x, y)$ für alle $(x, y) \neq (0{,}0)$ gilt. Also ist (0,0) instabil nach der Direkten Methode von Lyapunov.
Per Definitionem bedeutet das, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existiert, das $\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} < \delta$ erfüllt, sodass für die Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ des Systems zur Anfangsbedingung $0 \mapsto x^0$ ein $t^0 > 0$ mit $\sqrt{x_1(t^0)^2 + x_2(t^0)^2} \geq \varepsilon$ existiert.
Wir können nun zeigen, dass 0 auch eine instabile Ruhelage von $x' = f(x)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ wie gerade und $\delta > 0$ beliebig. Betrachte den Punkt $(x_1^0, x_2^0, 0) \in \mathbb{R}^3$ mit $\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + 0^2} < \delta$. Die Lösung des Problems $x' = f(x)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = (x_1^0, x_2^0, 0)$ hat die Form $x(t) = (x_1(t), x_2(t), e^{-t} \int_0^t x_1(s) e^s \, \mathrm{d}s)$, wie man leicht verifiziert. Mit obigem $t^0 > 0$ gilt $\sqrt{x_1(t^0)^2 + x_2(t^0)^2 + e^{2t^0} (\int_0^{t^0} x_1(s) e^s \, \mathrm{d}s)^2} \geq \varepsilon$; Per Definitionem ist 0 also instabil.
Per Definitionem könnte es auch passieren, dass die Lösung x anstatt die Bedingung $|x(t)| < \varepsilon$ zu verletzen eine endliche Entweichzeit aufweist. Weil die Strukturfunktion aber global definiert ist, kann nach der Charakterisierung vom Randverhalten dieser Fall nur auftreten, wenn die Lösung betragsmäßig gegen ∞ divergiert. Dann wird aber auch die Bedingung $|x(t)| < \varepsilon$ irgendwo verletzt und wir können ohne Einschränkung wie zuvor argumentieren.

J.F.B.