Frühjahr 12 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x(x-2)e^{\cos x}, \ x(0) = 1.$$

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Welche stationären Lösungen hat die Differentialgleichung?

b) Die maximale Lösung x aus (a) existiert auf ganz $\mathbb{R}$ und ist monoton fallend und beschränkt.

c) Die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Grenzwerte.

Lösungsvorschlag:

a) Die rechte Seite ist stetig differenzierbar und daher lokal lipschitzstetig. Die Aussage folgt daher aus dem Satz von Picard-Lindelöf.
Die stationären Lösungen entsprechen den Nullstellen der rechten Seite 0 und 2.

b) Verschiedene Lösungskurven dürfen sich wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit der rechten Seite nirgends schneiden. Gäbe es eine Stelle $t_0 \in I$ mit $x(t_0) > 2$, so würde nach dem Zwischenwertsatz wegen $x(0) = 1$ die konstante Lösung 2 geschnitten, ein Widerspruch. Genauso zeigt man, dass $x(t_0) < 0$ unmöglich ist. Es folgt $0 < x(t) < 2$ (strikte Ungleichungen, weil sonst die konstanten Lösungen wieder geschnitten würden) und damit ist x beschränkt, existiert also global nach der Charakterisierung des Randverhaltens, weil die rechte Seite auch global definiert ist. Die Monotonie sieht man aus $x(t), e^{\cos x(t)} > 0, x(t) - 2 < 0$, wegen $x'(t) < 0$ auf $\mathbb{R}$. Insbesondere ist f streng monoton fallend.

c) Als beschränkte monotone Funktion, besitzt f Randgrenzwerte. Wir werden hier sogar explizit $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ zeigen. Der Limes $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 2$ kann analog gezeigt werden.
Weil x streng monoton fällt und $x(0) = 1$ ist, folgt $0 < x(t) < 1$ für $t > 0$. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x(t_0) < \varepsilon$ existiert, dann folgt aus der Monotonie der Rest.
Angenommen dies wäre falsch, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $x(t) \geq \varepsilon$ auf $[0, \infty)$. Insbesondere folgt $\varepsilon \leq 1$. Daraus würde $x'(t) \leq \frac{\varepsilon}{e}(\varepsilon - 2)$ folgen, weil $\cos x \geq -1$ ist. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{e}(\varepsilon - 2) < 0$, dann folgt $x(t) = 1 + \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s \leq 1 + \delta t \to -\infty$ für $t \to \infty$, im Widerspruch zu $x(t) > 0$. Demnach war die Annahme falsch und die Behauptung korrekt und x konvergiert für $t \to \pm\infty$ gegen die angegebenen Werte.

$\mathcal{J.F.B.}$