Frühjahr 12 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie alle $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(z) = -f(\overline{z}),\ z \in \mathbb{C}$, bzw.

b) $\operatorname{Re} g(z) = \sin(\operatorname{Im} g(z)),\ z \in \mathbb{C}$, und $g(0) = 2\pi i$, bzw.

c) $h'(z) = z^2 h(z),\ z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $f(z) = -f(\overline{z}) = -f(z)$, also $f(z) = 0$. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ besitzt also Häufungspunkte und die Menge $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet. Nach dem Identitätssatz gilt $f \equiv 0$. Umgekehrt erfüllt die Nullfunktion natürlich die geforderte Eigenschaft und $f \equiv 0$ ist die einzige solche Funktion.

b) Aus $\operatorname{Im} g(z) \in \mathbb{R}$ folgt $\operatorname{Re} g(z) = \sin(\operatorname{Im} g(z)) \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{g(z)}$ ist holomorph und beschränkt wegen $|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re} g(z)} \leq e$, also konstant nach dem Satz von Liouville. Daraus folgt $0 = g'(z)e^{g(z)}$ und weil exp keine komplexe Nullstelle besitzt folgt $g'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weil $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, folgt die Konstantheit von g und wegen $g(0) = 2\pi i$ ist $g \equiv 2\pi i$. Wegen $0 = \sin(2\pi)$ erfüllt $g \equiv 2\pi i$ umgekehrt die gewünschte Eigenschaft und ist die einzige solche Funktion.

c) Für jedes $c \in \mathbb{C}$ erfüllt $h(z) = ce^{\frac{z^3}{3}}$ die Gleichung $h'(z) = z^2 h(z)$. Ist umgekehrt $h' = z^2 h(z)$, so folgt für $j(z) := h(z)e^{-\frac{z^3}{3}}$, dass $j'(z) = z^2 h(z)e^{-\frac{z^3}{3}} - z^2 h(z)e^{-\frac{z^3}{3}} = 0$ gilt. Weil $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, folgt die Konstantheit von j, also $j \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Umstellen liefert $h(z) = ce^{\frac{z^3}{3}}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$