Frühjahr 12 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Wie viele Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) hat die Gleichung
> $$z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + 6z = 1$$
> in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$?

Lösungsvorschlag:

Wir führen ein paar Polynome ein. Wir definieren jeweils für $z \in \mathbb{C}$:

$$p(z) := z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + 6z - 1, \qquad q(z) := 6z, \qquad r(z) := z^5 - z^4 + z^3 - z^2 - 1.$$

Dann ist sofort ersichtlich, dass die Lösungen der Gleichungen mit den Nullstellen von p (einschließlich der Vielfachheiten) übereinstimmen und, dass $p = q + r$ ist. Als Polynom fünften Grades besitzt p genau fünf Nullstellen mit Vielfachheit gezählt. Wir zeigen zunächst, dass jede davon einen Betrag hat, der kleiner als drei ist:
Für $|z| \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned}
|p(z)| &\geq |z|^5 - |z|^4 - |z|^3 - |z|^2 - 6|z| - 1 \\
&\geq 3|z|^4 - |z|^4 - |z|^3 - |z|^2 - 6|z| - 1 = 2|z|^4 - |z|^3 - |z|^2 - 6|z| - 1 \\
&\geq 6|z|^3 - |z|^3 - |z|^2 - 6|z| - 1 = 5|z|^3 - |z|^2 - 6|z| - 1 \\
&\geq 15|z|^2 - |z|^2 - 6|z| - 1 = 14|z|^2 - 6|z| - 1 \\
&\geq 42|z| - 6|z| - 1 = 36|z| - 1 \geq 108 - 1 = 107.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $|p(z)| \neq 0$ und somit auch $p(z) \neq 0$. Die Anzahl der Lösungen mit Vielfachheit in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$ ist also 0.
Wir bestimmen die Anzahl der Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit dem Satz von Rouché. Für $|z| = 1$ gilt

$$|q(z)| = 6 > 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq |r(z)|.$$

Wegen $6 > 0$ gilt zudem $q(z) \neq 0$. Nach dem Satz von Rouché stimmen also die Anzahl der Nullstellen von q und $q + r = p$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ überein. Wegen $q(z) = 0 \iff z = 0$ und $|0| = 0 < 1$ hat p hier also genau eine Nullstelle.
Wir haben bereits gesehen, dass p genau fünf Nullstellen besitzt, jede davon in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$. Wir haben weiter gesehen, dass genau eine Nullstelle in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ liegt. Außerdem folgt aus $|q(z)| > |r(z)|$ für $|z| = 1$ auch $p(z) \neq 0$, weil sonst $0 = p(z) \iff -r(z) = q(z) \implies |r(z)| = |q(z)|$ einen Widerspruch liefern würde. Daher müssen die verbliebenen vier Nullstellen von f in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ liegen.
Die Gleichung besitzt also genau eine Lösung in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, genau vier Lösungen in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ und gar keine Lösung in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$ jeweils unter Beachtung der Vielfachheit.

$\mathcal{J.F.B.}$