Frühjahr 12 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\sin(\pi(x^2+y^2))\\ x+\sqrt{3}y\end{pmatrix}.$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelösungen des ebenen autonomen Differentialgleichungssystems $\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$

b) Ist die Ruhelösung $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ stabil oder instabil?

Lösungsvorschlag:

a) Wir müssen die Nullstellen von f ermitteln. Damit die zweite Komponente verschwindet muss $x=-\sqrt{3}y$ gelten. Eingesetzt in die erste Komponente folgt $\sin(\pi(4y^2))=0$, also $4y^2=(2y)^2\in\mathbb{Z}$. Wegen $4y^2\geq 0$ muss es also ein $n\in\mathbb{N}_0$ geben mit $y=\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$. Jede Lösung hat also die Form $\left(\mp\frac{\sqrt{3n}}{2},\pm\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Umgekehrt ist jedes obige Paar natürlich eine Nullstelle von f. Die Ruhelösungen stimmen mit den Nullstellen von f überein, also sind durch obige Punkte alle Ruhelösungen gegeben.

b) Wir linearisieren das System und ermitteln die Jacobimatrix $Jf(x,y)=\begin{pmatrix}2\pi x\cos(\pi(x^2+y^2)) & 2\pi y\cos(\pi(x^2+y^2))\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Setzen wir die angegebene Ruhelösung ein, erhalten wir die Matrix $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\pi & \pi\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Diese ist zweidimensional, also indefinit, weil die Determinante -4π negativ ist.

$\mathcal{J.F.B.}$