Frühjahr 12 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

> Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit
> $$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$
> für alle $z \in U$ gibt.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten den Hauptzweig des komplexen Logarithmus $\operatorname{Log} : \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$. Für $|z| < \frac{1}{2}$ ist $|1+z^5+z^{10}-1| < \frac{33}{1024} < 1$, also $1+z^5+z^{10} \notin (-\infty, 0]$. Wir können also $h(z) = \operatorname{Log}(1 + z^5 + z^{10})$ wählen. Diese ist holomorph als Verkettung holomorpher Funktionen und erfüllt $e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$ per Definition des Logarithmus.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$