Frühjahr 12 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, sodass $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Lösungsvorschlag:

a) Nein, die gibt es nach dem Maximumsprinzip nicht. Ist f holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, so auch auf $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}}$. Nach dem Maximumsprinzip nimmt f das Betragsmaximum auf $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}}$ am Rand an, es beträgt nach den Voraussetzungen also 1. Wegen $|\frac{1}{2}| < 1$ muss also $|f(\frac{1}{2})| \leq 1$ gelten, im Widerspruch zu $|2| = 2 > 1$.

b) Ja gibt es, zum Beispiel ist $g(z) = iz^2$ ganz und es ist $g(x+iy) = -2xy + i(x^2 - y^2)$, weshalb der Imaginärteil die geforderte Form hat.

c) Nein, die gibt es nicht. Nach dem Satz von Taylor würde sich f um 0 in eine lokal konvergente Potenzreihe entwickeln lassen, deren Koeffizienten durch $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ gegeben sind, hier also $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. Mit der Formel von Euler erhalten wir als Konvergenzradius also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

ein Widerspruch zur lokalen Konvergenz der Potenzreihe um 0.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$