Frühjahr 12 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Berechnen Sie
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
> und erläutern Sie dabei Ihre Rechenschritte.

Lösungsvorschlag:

Der Integrand ist stetig (der Nenner verschwindet nicht) und majorisierbar gegen $\frac{1}{1+x^2}$, was über $\mathbb{R}$ integrierbar ist (der Arkustangens ist eine Stammfunktion). Daher können wir das Integral als Limes $R \to \infty$ der Integrale über [-R,R] berechnen.
Wir betrachten die offene, konvexe Menge $H := \{x+iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in (-1, \infty)\} \subset \mathbb{C}$ und die holomorphe Funktion $f : H\backslash\{i\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$. Man beachte, dass der Realteil von f nach der Eulerformel auf $\mathbb{R}$ mit dem Integranden unseres gesuchten Integrals übereinstimmt.
Für $R > 1$ verlaufen die geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma_R = \gamma_R^1 + \gamma_R^2$ mit

$$\gamma_R^1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t; \qquad \gamma_R^2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$$

in $H\backslash\{i\}$ und umkreisen i genau einmal gegen den Uhrzeigersinn. Nach dem Residuensatz beträgt das Integral $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) = \frac{\pi}{e}$, wobei wir das Residuum von f im Pol erster Ordnung i (einfache Nullstelle des Nenners bei nichtverschwindendem Zähler) mit der Polformel berechnet haben.
Wir schätzen $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z$ mit der Standardabschätzung ab. Die Kurvenlänge des Pfades beträgt für $R > 1$ immer πR. Der Integrand lässt sich entlang der Spur betragsmäßig gegen $\frac{1}{R^2-1}$ abschätzen. Für $z \in \operatorname{Spur}(\gamma_R)$ ist nämlich $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)} \leq 1$ und $|z^2+1| \geq ||z|^2-1| = R^2-1$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Wegen

$$0 \leq \left| \int_{\gamma_R^2} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \pi \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

nach der Standardabschätzung folgt $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{e}$.
Wegen $\int_{\gamma_R^1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ beträgt das Integral also $\frac{\pi}{e}$. Hier wurde die Symmetrie des Integranden genutzt, um zu folgern, dass der Imaginärteil 0 ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$