Frühjahr 11 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0{,}0)\}$ und $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \text{ auf } U$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = (1{,}0), \ \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}, 0\right) = (-1{,}0).$$

Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0{,}0), \ \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = (0{,}1).$$

(Hinweis: Nutzen Sie Hilfsmittel der Funktionentheorie.)

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, \ g(x+iy) := f_1(x,y) + i f_2(x,y)$, dann erfüllt g die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, ist also holomorph.
Wir untersuchen die Singularität in 0. Für die komplexe Folge $z_n := \frac{1}{n}$ mit Limes 0 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = 1$, also kann 0 kein Pol sein. Für die komplexe Folge $w_n := -\frac{1}{n}$ mit Limes 0 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g(w_n) = -1 \neq 1$, also kann 0 keine hebbare Singularität sein. Damit muss 0 eine wesentliche Singularität sein.
Nach dem Satz von Casorati (oder dem von Piccard) gibt es eine Folge $j_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, die gegen 0 konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} g(j_n) = i$ erfüllt.
Wir setzen $x_n := \operatorname{Re} j_n$ und $y_n := \operatorname{Im} j_n$, dann ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ und

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = ((\operatorname{Re} \lim_{n\to\infty} j_n), (\operatorname{Im} \lim_{n\to\infty} j_n)) = (\operatorname{Re} 0, \operatorname{Im} 0) = (0{,}0)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} g(x_n + iy_n), \operatorname{Im} g(x_n + iy_n)) =$$
$$= (\operatorname{Re} (\lim_{n\to\infty} g(j_n)), \operatorname{Im} (\lim_{n\to\infty} g(j_n))) = (\operatorname{Re} i, \operatorname{Im} i) = (0{,}1).$$

$\mathcal{J.F.B.}$