Frühjahr 11 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $z \in U$ gibt mit $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man

   i) auf die Voraussetzung $f(0) = 0$ verzichtet, oder

   ii) U durch eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und $1 \in U$ ersetzt?

Lösungsvorschlag:

a) f ist eine nichtkonstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, also insbesondere offen. Wegen $f(1) = 1$ gilt $1 \in f(U)$ und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| < \varepsilon\} \subset f(U)$. Also ist $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in f(U)$ und es existiert ein $z \in U$ mit $f(z) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, also $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.

   i) Nein, betrachte $f \equiv 1$.

   ii) Nein, betrachte $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z \neq \frac{1}{2}\}$ und $f(z) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{falls } \mathrm{Re}\ z > \frac{1}{2}. \end{cases}$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$