Frühjahr 11 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Sei
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) := x^3 + 3xy^2 - 3xy.$$
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -6xy + 3x \\ \dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y\end{aligned}$$
sind stabil, welche instabil?

Lösungsvorschlag:

a) Der Gradient von g ist $\nabla g(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 3y, 6xy - 3x)^{\mathrm{T}}$ und die kritischen Punkte von g sind dessen Nullstellen. Die zweite Komponente $6xy-3x = 3x(2y-1)$ verschwindet genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$ ist. Ist $x = 0$, so verschwindet die erste Komponente $3y^2 - 3y = 3y(y - 1)$ genau dann, wenn $y = 0$ oder $y = 1$ ist. Ist dagegen $y = \frac{1}{2}$, so verschwindet die erste Komponente $3x^2 - \frac{3}{4}$ genau dann, wenn $x = \frac{1}{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}$ ist. Die kritischen Punkte sind also $(0{,}0), (0{,}1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Um diese zu klassifizieren, berechnen wir die Hessematrix von g und erhalten $H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y-3 \\ 6y-3 & 6x \end{pmatrix}$ sowie $H_1 := H_g(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 := H_g(0{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $H_3 := H_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $H_4 := H_g(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Weil H_3 und H_4 diagonal sind, können wir sofort erkennen, dass H_3 positiv definit und H_4 negativ definit ist. Daher ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein striktes lokales Minimum und $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein striktes lokales Maximum. Bei H_1 und H_2 stellen wir fest, dass die Determinante -9, also negativ ist. Da die Matrizen zweidimensional sind, müssen sie indefinit sein und $(0{,}0)$ und $(0{,}1)$ sind Sattelpunkte.

b) Die stationären Lösungen dieser Differentialgleichung, die Nullstellen der Strukturfunktion und die kritischen Punkte von g stimmen überein. Man rechnet außerdem nach, dass die Strukturfunktion überall orthogonal zu ∇g ist, also sind g und $-g$ Lyapunovfunktionen. Weil $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein striktes Minimum von g und $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein striktes Minimum von $-g$ ist, sind diese beiden Punkte stabil nach der Direkten Methode von Lyapunov.
Die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist $J(x, y) = \begin{pmatrix} 3-6y & -6x \\ 6x & 6y-3 \end{pmatrix}$. Wir erhalten $J(0{,}0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -J(0{,}1)$. Beide Matrizen haben den Eigenwert 3, der einen positiven Realteil aufweist. Nach dem Linearisierungssatz sind $(0{,}0)$ und $(0{,}1)$ instabil.

J.F.B.