F11T3A2

Sei $D := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 <\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \sqrt{1-t^2-x^2}$. Zeige:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x),\ x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

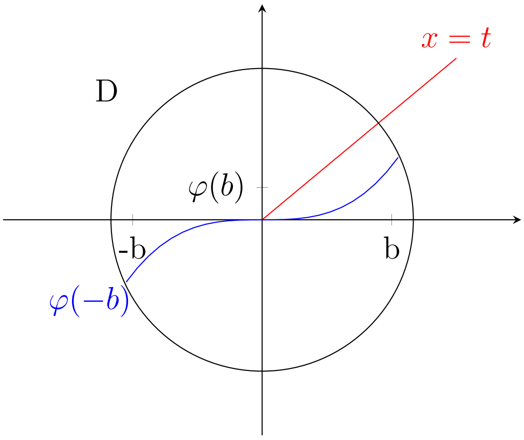
b) Die Grenzwerte $\varphi(a) := \lim\limits_{t \searrow a} \varphi(t)$ und $\varphi(b) := \lim\limits_{t \nearrow b} \varphi(t)$ existieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt $-a = b$, $b^2 + (\varphi(b))^2 = 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.

Zu a):

D ist offen und zusammenhängend (z.B. als offene Kreisscheibe).
$f \in C^1(D)$, daher hat $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = 0$ eine eindeutige maximale Lösung $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$.
Da $\Gamma(\varphi) = \{(t,\varphi(t)) : t \in]a,b[\} \subseteq D \subseteq]-1,1[^2$ folgt $-1 \le a$ und $b \le 1$.

Zu b):



$\varphi'(t) = f(\underbrace{t, \varphi(t)}_{\in D \text{ für alle } t \in]a,b[}) > 0$ für alle $t \in]a,b[$.

φ ist auf $]a,b[$ (streng) monoton steigend.
φ ist beschränkt (denn aus $\Gamma(\varphi) \subseteq D \Rightarrow \varphi(t) \in]-1,1[$ für alle $t \in]a,b[$)

$$\varphi(a) := \lim_{t \searrow a} \varphi(t) = \inf_{t \in]a,b[} \varphi(t) \quad \text{und} \quad \varphi(b) := \lim_{t \nearrow b} \varphi(t) = \sup_{t \in]a,b[} \varphi(t)$$

existieren als Grenzwerte von monoton steigenden beschränktem φ.

Zu c):

φ hat bei b das Randverhalten einer maximalen Lösung, da $b < \infty$ und $\varphi(b) := \lim\limits_{t \nearrow b} \varphi(t) \in \mathbb{R}$. Bleibt nur $\lim\limits_{t \nearrow b} \operatorname{dist}(t, \varphi(t), \partial D) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow (b, \varphi(b)) \in \overline{D}$ und sogar $\underbrace{(b, \varphi(b))}_{\Rightarrow b^2 + (\varphi(b))^2 = 1} \in \partial D$ (denn sonst lässt sich die Lösung in $(b, \varphi(b)) \in D$ fortsetzen!)
Betrachte $\lambda :]-b, b[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t \geq 0 \\ -\varphi(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases}$

$$\lambda'(t) = \begin{cases} \varphi'(t) & \text{für } t > 0 \\ \varphi'(-t) & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

$$\lambda'(0) = \lim_{t \to 0,\ t \neq 0} \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi'(0) = 1$$

$$\lambda'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{1 - t^2 - (\varphi(t))^2} & t \geq 0 \\ \sqrt{1 - t^2 - (\varphi(-t))^2} & t < 0 \end{array} \right\} = \sqrt{1 - t^2 - (\lambda(t))^2}$$

$\Rightarrow \lambda$ löst $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$.
Da φ bei b das Randverhalten einer maximalen Lösung besitzt, hat dies auch λ bei b und $-b \Rightarrow \lambda$ ist die maximale Lösung zu $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$, d.h. $\lambda = \varphi$ und $a = -b$.

$$\varphi(t) = \underbrace{\varphi(0)}_{=0} + \int_0^t \varphi'(s)ds = \int_0^t \underbrace{\sqrt{1 - s^2 - (\varphi(s))^2}}_{\in]0,1[\text{ für } s \neq 0} ds \in]0, t[\text{ für alle } t \in]0, b[$$

$$\Rightarrow \{(t, \varphi(t)) : t \in]0, b[\} \subseteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, x < t\} \cap D$$

Da $(b, \varphi(b)) \in \partial D$ ist $b \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$