Frühjahr 11 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$e^{-x}(x+y) - e^{-x}(y-x)y' = 0.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Differenzialgleichung exakt ist oder ob wenigstens ein integrierender Faktor existiert.

b) Bestimmen Sie jeweils die maximal fortgesetzte Lösung der Differenzialgleichung, die der folgenden Anfangsbedingung genügt:

   i) y(1)=0

   ii) y(-1)=1

Lösungsvorschlag:

a) Die vorliegende Differentialgleichung ist nicht exakt, weil die Integrabilitätsbedingung

$$e^{-x} = \partial_y(e^{-x}(x+y)) \stackrel{!}{=} \partial_x(-e^{-x}(y-x)) = (y-x+1)e^{-x}$$

nicht allgemein, sondern genau für $y = x$ erfüllt ist.
Die Struktur der Differentialgleichung lässt vermuten, dass die positive und stetige natürliche Exponentialfunktion einen integrierenden Faktor darstellt. Wir testen mit Erfolg, ob die resultierende Differentialgleichung $x + y + (x-y)y' = 0$ exakt ist. Es gilt nämlich $\partial_y(x+y) = 1 = \partial_x(x-y)$ und $\mathbb{R}^2$ ist konvex, also liefert das Lemma von Poincaré die Exaktheit.

b) Wir bestimmen ein Erstes Integral der in a) gefundenen äquivalenten exakten Differentialgleichung. (So hätte man direkt die Exaktheit zeigen können.) Wir können hier sehr einfach sehen, dass $\Phi(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$ ein Erstes Integral definiert. Um die Anfangswertprobleme zu lösen, beachten wir, dass Φ entlang jeder Lösung konstant ist. Wir werden also die Gleichung $\Phi(x,y) = \Phi(1{,}0) = \frac{1}{2}$ in i) und die Gleichung $\Phi(x,y) = \Phi(-1{,}1) = -1$ in ii) nach y auflösen.

   i) Es gilt $\Phi(x,y) = \frac{1}{2} \iff y^2 - 2xy + 1 - x^2 = 0 \iff y = x \pm \sqrt{2x^2-1}$. Der Wurzelterm ist in $\mathbb{R}$ genau für $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das maximale Intervall, das dieser Bedingung genügt und die 1 enthält, ist $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. Um noch die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ zu erfüllen, wählen wir das negative Vorzeichen und erhalten $y(x) := x - \sqrt{2x^2-1}$ als Lösung auf $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, wobei wir den linken Randpunkt entfernen, weil y dort nicht (einseitig) differenzierbar ist.

   ii) Es ist $\Phi(x,y) = -1 \iff y^2 - 2xy - 2 - x^2 \iff x \pm \sqrt{2x^2+2}$. Wegen $2x^2 + 2 \geq 2 > 0$ ist dieser Term für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert. Um $y(-1) = 1$ zu erfüllen, wählen wir das positive Vorzeichen und erhalten $y(x) = x + \sqrt{2x^2+2}$ auf $\mathbb{R}$.

J.F.B.