Frühjahr 11 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}$$

Lösungsvorschlag:

Zum Beweis wenden wir den Residuensatz auf die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$ an, wobei S die endliche Menge der Nullstellen des Zählers ist. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und für jedes $R > 1$ verlaufen die stückweise stetig differenzierbaren, geschlossenen Kurven $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit

$$\gamma_1 : [0,R] \ni t \mapsto t; \quad \gamma_2 : \left[0, \frac{1}{n}\right] \ni t \mapsto Re^{\pi i t}; \quad \gamma_3 : [0,R] \ni t \mapsto (R-t)e^{\frac{i\pi}{n}}$$

vollständig in $\mathbb{C}\backslash S$. Das einzige Element von S, das dabei umschlossen wird, ist $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2n}}$. Dieses wird genau einmal in positivem Sinn umrundet. Da es eine einfache Nullstelle des Nenners von f ist, für die der Zähler nicht verschwindet, beträgt das Residuum an diesem Punkt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}}$ nach der Polformel und das Integral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\ \mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{\pi i}{nz_0^{2n-1}}$ nach dem Residuensatz unabhängig von $R > 1$. Mittels der Definition des Wegintegrals erhalten wir $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$ und $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{-e^{\frac{i\pi}{n}}}{1+(R-t)^{2n}}\,\mathrm{d}t = -e^{\frac{i\pi}{n}} \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$ mittels der Substitution $x = R - t$. Die Kurvenlänge von γ_2 beträgt $\frac{R\pi}{n}$ und $|f|$ ist entlang der Spur von γ_2 beschränkt gegen $\frac{1}{R^{2n}-1}$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Nach der Standardabschätzung ist $0 \le |\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z| \le \frac{\pi R}{n(R^{2n}-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$, d. h. der Limesbeitrag von γ_2 verschwindet. Das angegebene Integral existiert, weil der Nenner keine Nullstellen hat und ein Polynom ist, dessen Grad um mindestens 2 höher als der Grad des Zählers ist. Insbesondere ist der Integrand eine rationale Funktion, also stetig, also lokal integrabel. Weil der Integrand außerdem gerade ist, entspricht das Integral über die reelle Achse dem Doppelten des Integrals über die nichtnegative Halbachse. Daher gilt also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \lim_{R\to\infty} \left(\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z \right).$$

Diesen Grenzwert können wir mit den vorherigen Ergebnissen berechnen. Er beträgt

$$\frac{2\pi i}{nz_0^{2n-1}(1-z_0^2)} = \frac{\pi}{n}\frac{2iz_0^{2n}}{e^{-\frac{\pi i}{2n}} - e^{\frac{\pi i}{2n}}} = \frac{\pi}{n}\frac{2i}{e^{\frac{\pi}{2n}i} - e^{-\frac{\pi}{2n}i}} = \frac{\pi}{n\sin(\frac{\pi}{2n})}.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$