Frühjahr 11 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei G ein beschränktes nicht-leeres Gebiet in $\mathbb{C}$ und seien $f, g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, deren Einschränkungen auf G holomorph sind. Zeigen Sie: Gilt $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial G$ und haben f und g keine Nullstellen in $\overline{G}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass $f = \lambda g$.

Lösungsvorschlag:

Wir können die Funktion $h : \overline{G} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ betrachten, die holomorph auf G, stetig und nullstellenfrei auf dem Kompaktum $\overline{G}$ ist. Nach dem Maximumsprinzip (oder dem Minimumsprinzip) muss h auf $\overline{G}$ konstant sein, weil wegen $|h|_{\partial G}| \equiv 1$ jeder Punkt im Gebiet G ein lokales Maximum und Minimum von $|h|$ ist. Wegen $|h(z)| = 1$ für alle $z \in G$ muss also $h|_{\overline{G}} \equiv \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ sein. Es folgt somit $f = \lambda g$ nach Multiplikation mit der nullstellenfreien Funktion g.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$