Frühjahr 11 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, dass es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$

Lösungsvorschlag:

a) Dass $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$ die angegebenen Bedingungen erfüllt, folgt sofort aus der Kettenregel. Wir zeigen, dass dies die einzige Funktion ist. Ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften, so folgt für $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $j(z) = g(z)e^{-\frac{z^2}{2}}$, dass $j'(z) = g'(z)e^{-\frac{z^2}{2}} - zj(z) = zj(z) - zj(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Weil $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist j konstant, also $j \equiv j(0) = 1$. Umstellen liefert $g(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$, weil die natürliche Exponentialfunktion keine komplexen Nullstellen besitzt.

b) Eine mögliche Wahl ist die Identität $f(z) = z$. Wir zeigen, dass dies die einzige Funktion ist. Ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit den geforderten Attributen, so ist g biholomorph, da $g^{-1} = g$ existiert und bijektiv ist. Wir können g um 0 in eine global konvergente Potenzreihe entwickeln und erhalten $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion $h : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ ist ebenfalls holomorph und injektiv als Verkettung holomorpher, injektiver Funktionen. Wir zeigen, dass 0 keine wesentliche Singularität sein kann und nehmen dazu das Gegenteil an um einen Widerspruch zu erhalten. Weil g bijektiv ist, gilt $g(z) = 0 \iff z = 0$ und folglich $h(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ nach dem Satz von Piccard. Es gibt also ein $z_0 \neq 0$ mit $h(z_0) = 1$. Weil h injektiv ist, gilt also $h(\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < |z_0|\}\backslash\{0\}) \subset \mathbb{C}\backslash\{0{,}1\}$ im Widerspruch zum Satz von Piccard. Also war die Annahme falsch und 0 ist ein Pol oder eine hebbare Singularität von g. Aus der Laurent-Entwicklung folgern wir, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$, weshalb g ein Polynom ist. Aus $\text{grad}(g)^2 = \text{grad}(g \circ g) = \text{grad}(id) = 1$ folgt, dass g ein Polynom ersten Grades ist, also von der Form $g(z) = g'(0)z + g(0) = z$ wie zu zeigen war.

$\mathcal{J.F.B.}$