Frühjahr 11 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

mit maximaler Definitionsmenge $D \subset \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass das Integral der Funktion f über den positiv orientierten Kreis um 0 mit Radius 3 verschwindet.

b) Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), dass f auf $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$ eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)

Lösungsvorschlag:

a) Die Singularitäten von f sind $z_\pm = -1 \pm i$. Beide haben Betrag $\sqrt{2}$ und sind Pole erster Ordnung. Für die Residuen gilt daher $\operatorname{Res}_{-1\pm i}(f) = \frac{1}{\pm 2i} = \frac{\mp i}{2}$. Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 3e^{it}$ ist glatt, geschlossen und parametrisiert die Kreislinie um 0 mit Radius 3 gegen den Uhrzeigersinn, wobei sie beide Singularitäten einmal positiv umschließt. Weil $\mathbb{C}$ offen und konvex ist, und f darauf holomorph mit Ausnahme von zweien (endlich vielen) Singularitäten ist, ist der Residuensatz anwendbar und liefert $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{i}{2} - \frac{i}{2}) = 0$.

b) Völlig analog zu a) verschwindet das Kurvenintegral über jeden geschlossenen C^1-Weg in $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > \sqrt{2}\}$. Daher besitzt f sogar eine Stammfunktion auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > \sqrt{2}\}$ und wegen $\sqrt{2} < 2$ erst recht auf $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$