Frühjahr 11 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Untersuchen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$, ob der Fixpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ asymptotisch stabil oder stabil ist.

Lösungsvorschlag:

Wir untersuchen das System zuerst mittels Linearisierung. Die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist $J(x,y) = \begin{pmatrix} a - 3x^2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, deren Eigenwerte die Diagonaleinträge sind. Für $(x,y) = (0{,}0)$ ergeben sich die Eigenwerte a und -2.
Falls a negativ ist, haben alle Eigenwerte negativen Realteil und der Fixpunkt ist asymptotisch stabil und daher auch stabil. Falls a positiv ist, existiert ein Eigenwert mit positivem Realteil und der Fixpunkt ist instabil und daher auch nicht asymptotisch stabil. Für $a = 0$ liefert Linearisierung keine Aussage, weil das System nichtlinear ist.
Für $a = 0$ können wir das System explizit lösen und somit zeigen, dass $(0{,}0)$ asymptotisch stabil ist. Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, dann suchen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Die erste Komponente muss das Anfangswertproblem $x' = -x^3, x(0) = x_0$ lösen. Falls $x_0 = 0$ ist, gilt $x \equiv 0$. Andernfalls ist die erste Gleichung $x' = -x^3$ trennbar, und die (nach Picard-Lindelöf eindeutige) Lösung lautet $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1+2tx_0^2}}$. Diese Formel ist auch für $x_0 = 0$ gültig. Die Lösung existiert auf $[0, \infty) \subset \left(-\frac{1}{2x_0^2}, \infty\right)$, ist dort strikt monoton und konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0. Insbesondere gilt $|x(t)| \leq |x_0|$ für alle $t \in [0, \infty)$.
Die Lösung der zweiten Gleichung $y' = x - 2y, y(0) = y_0$ erhalten wir aus der Lösungsformel linearer Gleichungen als $y(t) = y_0 e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t x(s) e^{2s} \,\mathrm{d}s$. Es gilt $|y(t)| \leq |y_0| + e^{-2t} \int_0^t |x_0| e^{2s} \,\mathrm{d}s = |y_0| + |x_0| e^{-2t} (\frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2}) \leq |y_0| + \frac{|x_0|}{2}$ für alle $t \geq 0$ unter Verwendung der zuvor gezeigten Ungleichung $|x(t)| \leq |x_0|$. Außerdem konvergiert y gegen 0, für den Summanden $y_0 e^{-2t}$ ist dies klar. Für den zweiten Summanden betrachten wir die (nach dem HDI) stetig differenzierbare Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(t) = \int_0^t x(s) e^{2s} \,\mathrm{d}s$. Falls g beschränkt bleibt ist nichts zu zeigen. Sonst konvergiert $g(t) \to \infty$, falls $x_0 > 0$ ist und $g(t) \to -\infty$, falls $x_0 < 0$ ist. Dann ist die Regel von L'Hospital anwendbar und liefert $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(t)}{e^{2t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)e^{2t}}{e^{2t}} = \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$.
Wir haben bereits $\lim\limits_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0{,}0)$ unabhängig von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gezeigt, also ist $(0{,}0)$ attraktiv. Wir müssen für die Stabilität von $(0{,}0)$ nur zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\|(x_0, y_0)\|_1 < \delta \implies \|(x(t), y(t))\|_1 < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$.
Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ nun $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, so folgt aus $\|(x_0, y_0)\|_1 = |x_0| + |y_0| < \delta$ auch $\|(x(t), y(t))\|_1 = |x(t)| + |y(t)| \leq |x_0| + |y_0| + \frac{|x_0|}{2} \leq 2|x_0| + 2|y_0| = 2 \|(x_0, y_0)\|_1 < \varepsilon$.

$\mathcal{J.F.B.}$