Frühjahr 11 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Untersuchen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

jeweils, ob es Lösungen mit den wie folgt vorgegebenen Werten gibt, und geben Sie im Falle der Existenz alle solchen Lösungen an:

a) $y(0) = 0$ und $y(1) = 2$

b) $y(0) = 0$ und $y(2) = 2$

c) $y(0) = 0$ und $y(3) = 2$

Lösungsvorschlag:

Vorbereitung: Die Strukturfunktion der Differentialgleichung ist außerhalb von 1 stetig differenzierbar, als Verknüpfung solcher Funktionen. Das Anfangswertproblem $y' = 2\sqrt{|y-1|}$, $y(0) = 0$ besitzt nach dem Satz von Picard-Lindelöf, also genau eine maximale Lösung um 0. Weil y' nichtnegativ ist, wächst die Lösung monoton. Weil die Lösung differenzierbar sein muss, ist sie auch stetig. Wir betrachten das maximale Intervall I auf dem die Lösung existiert und kleiner als 1 ist. Dort ist die Gleichung separierbar und wir können die Gleichung explizit lösen. Aus

$$1 - \sqrt{|y(t)-1|} = \int_0^{y(t)} \frac{1}{2\sqrt{|s-1|}}\,\mathrm{d}s = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = t$$

folgt $1 - y(t) = |y(t)-1| = (1-t)^2$ und $y(t) = 2t - t^2$. Es gilt $y(t) = 2 \iff t = 1$. Jede Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$ existiert also zumindest auf $(-\infty,1)$ und stimmt dort mit $2t - t^2$ überein, weil dort die rechte Seite der Differentialgleichung stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig ist.

a) Es gibt keine solche Lösung. Jede Lösung, die in 0 und 1 definiert ist, ist zumindest auf $[0,1]$ definiert und dort stetig. Sie stimmt nach der Vorbereitung auf $[0,1)$ mit $t \mapsto 2t - t^2$ überein, erfüllt also $y(1) = \lim_{t\to 1-} 2t - t^2 = 1 \neq 2$.

b) Analog zur Vorbereitung begründen wir die Existenz einer eindeutigen Maximallösung von $y' = 2\sqrt{|y-1|}$ auf einem maximalen Intervall J um 2, auf dem die Lösung größer als 1 ist. Wieder trennen wir die Gleichung und erhalten

$$\sqrt{|y(t)-1|} - 1 = \int_2^{y(t)} \frac{1}{2\sqrt{|s-1|}}\,\mathrm{d}s = \int_2^t 1\,\mathrm{d}s = t - 2,$$

woraus $y(t) - 1 = |y(t)-1| = (t-1)^2$ und $y(t) = (t-1)^2 + 1$ folgt. Es gilt $y(t) = 1 \iff t = 1$. Jede Lösung der Differentialgleichung mit $y(2) = 2$ existiert zumindest auf $(1,\infty)$ und stimmt dort mit $1 + (t-1)^2$ überein.

Diese Lösung lässt sich mit der Lösung aus der Vorbereitung koppeln, die Funktion $t \mapsto \begin{cases} 2t - t^2, & t \in (-\infty,1) \\ 1, & t = 1 \\ 1 + (t-1)^2, & t \in (1,\infty) \end{cases}$ löst die Differentialgleichung und erfüllt beide Wertbedingungen. Die Differenzierbarkeit in 1 sieht man durch Betrachtung der einseitigen Differentialquotienten. Jede Einschränkung dieser Funktion auf ein Oberintervall von [0,2] erfüllt die vorgegebenen Werte und die Differentialgleichung. Umgekehrt ist jede Funktion mit diesen Eigenschaften eine Einschränkung dieser Funktion. Für $t \neq 1$ wurde dies zuvor begründet und für $t = 1$ sieht man analog zu a) ein, dass $y(1) = 1$ sein muss.

c) Wie in b) oder mit der Translationsinvarianz autonomer Differentialgleichung findet man, dass jede Lösung des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y-1|}, y(3) = 2$ zumindest auf $(2,\infty)$ existiert und dort mit $1 + (t-2)^2$ übereinstimmt.
Ist nun y eine Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(3) = 2$, so existiert y zumindest auf [0,3]. Auf [0,1) gilt $y(t) = 2t - t^2$, auf (2,3] gilt $y(t) = 1 + (t-2)^2$. Aus der Differenzierbarkeit der Lösung folgt ihre Stetigkeit und $y(1) = \lim_{t\to 1-} y(t) = 1 = \lim_{t \to 2+} y(t) = y(2)$. Weil wir in der Vorbereitung gesehen hatten, dass y monoton wachsen muss, folgt $y \equiv 1$ auf [1,2]. Wie in b) sind die gesuchten Funktionen die Einschränkungen der Funktion $t \mapsto \begin{cases} 2t - t^2, & t \in (-\infty,1) \\ 1, & t \in [1,2] \\ 1 + (t-2)^2, & t \in (2,\infty) \end{cases}$ auf Oberintervalle von [0,3]. Die Differenzierbarkeit in 1 und 2 sieht man wieder durch Betrachtung der einseitigen Differentialquotienten ein.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$