Frühjahr 10 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Für die Funktion
> $$f(z) = \frac{2}{z(z^2+1)}$$
> bestimme man die Laurentreihen (Laurententwicklung) in den Bereichen $A_1 = \{z \in \mathbb{C}: \ 0 < |z| < \frac{1}{2}\}, A_2 = \{z \in \mathbb{C}: \ 0 < |z-i| < 1\}, A_3 = \{z \in \mathbb{C}: \ 2 < |z-i| < 3\}$, und berechne längs $\alpha(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ und $\beta(t) = 4e^{4it}$, $t \in [0, 2\pi]$, die Wegintegrale $\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z, \int_\beta f(z)\mathrm{d}z$.
> Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösungsvorschlag:

PBZ: Wir schreiben f zunächst um. Die Nullstellen des Nenners sind $0, -i, i$, weshalb wir den Ansatz
$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$
wählen. Das führt auf
$$2 = A(z^2+1) + B(z^2 - iz) + C(z^2 + iz).$$
Setzen wir die Nullstellen ein, so folgt $2 = A(z=0) = -2B(z=-i) = -2C(z=i)$. Also ist durch Partialbruchzerlegung
$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}.$$

A_1 : Wir nutzen die geometrische Reihe sowie
$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{i}{1-iz} - \frac{i}{1-(-iz)}$$
und erhalten für $|z| < 1$, also insbesondere für $z \in A_1$
$$f(z) = \frac{2}{z} + i\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n - i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n = \frac{2}{z} + 2i\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^{2n+1} = \frac{2}{z} - 2z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

A_2 : Wieder nutzen wir die geometrische Reihe und
$$f(z) = \frac{2}{z-i+i} - \frac{1}{z-i+2i} - \frac{1}{z-i} = \frac{2}{i}\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{i})} + \frac{i}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{2i})} - \frac{1}{z-i}$$
um für $0 < |z-i| < 1$ die folgende Darstellung zu erhalten
$$f(z) = \frac{2}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i}\right)^n + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n - \frac{1}{z-i}.$$

A_3 : Wir nutzen die vorherige Darstellung für f, brauchen aber eine andere Entwicklung für die geometrische Reihe. Wegen $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{-1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ für $|\frac{1}{z}| < 1 \iff |z| > 1$ erhalten wir aus $|-\frac{z-i}{i}| > 2 > 1$ und $|-\frac{z-i}{2i}| > 1$

$$f(z) = -\frac{2}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{z-i}\right)^n - \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n - \frac{1}{z-i}.$$

$\int_\alpha f \mathrm{d}z$: α ist ein geschlossener, glatter Weg, der vollständig in der offenen, konvexen Menge $B_1(0)$ verläuft, ohne durch 0 zu laufen. Außer der einen Singularität 0 ist f auf $B_1(0)$ holomorph. Nach dem Residuensatz gilt also $\int_\alpha f \mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Res}_0(f)$. Dabei wird benutzt, dass α sich einmal positiv orientiert um 0 windet, und $\pm i$ gar nicht umschließt. Das Residuum lesen wir aus der Laurentreihendarstellung auf A_1 ab, es beträgt 2. Demnach ist der Integralwert $4\pi i$.

$\int_\beta f \mathrm{d}z$: Völlig analog zu vorher begründet man die Anwendbarkeit des Residuensatzes, wobei $\mathbb{C}$ statt $B_1(0)$ betrachtet wird und drei Singularitäten, nämlich $0, -i, i$, ausgenommen werden müssen. Dieser Weg windet sich viermal positiv orientiert um jede Singularität. Wir lesen die Residuen aus der Partialbruchzerlegung ab und erhalten $\mathrm{Res}_i(f) = -1 = \mathrm{Res}_{-i}(f)$. Die Summe der Residuen ist 0 und demnach auch der Integralwert $(2\pi i(4 \ \mathrm{Res}_0(f) + 4 \ \mathrm{Res}_i(f) + 4 \ \mathrm{Res}_{-i}(f)))$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$