Frühjahr 10 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$. Sei $K \subseteq G$ eine kompakte Kreisscheibe mit Radius $r > 0$, und setze $M := \sup\{|f(z)| : z \in K\}$.

a) Man beweise mit Hilfe der Integralformel von Cauchy, dass alle $z \in K$ mit $|f(z)| = M$ auf dem Rand von K liegen.

b) Man zeige weiterhin, dass in allen $z \in K$ mit $|f(z)| = M$ die Ableitung nicht verschwindet: $f'(z) \neq 0$.
Hinweis: Man betrachte kleine Kreisscheiben um z.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $z_0 \in K^\circ$, dann gibt es ein $R > 0$ mit $|z - z_0| \leq R \implies z \in K \implies |f(z)| \leq M$. Nach Cauchys Integralformel gilt für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + Re^{it}$, dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, \mathrm{d}t.$$

Hätte der linke Term einen Betrag von M, so auch der rechte. Es gilt also

$$M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})|\, \mathrm{d}t.$$

Gäbe es ein $t \in [0, 2\pi]$ mit $|f(z_0 + Re^{it})| < M$ so finden wir aus Stetigkeitsgründen ein $\delta > 0$ mit $|f(z_0 + Re^{is})| < M$ für $t < s < t + \delta$ für $t \neq 2\pi$. Dann ist $\int_t^{t+\delta} |f(z_0 + Re^{it}|\, \mathrm{d}t < \delta M$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{is})|\, \mathrm{d}s < \frac{1}{2\pi} \int_0^t M\, \mathrm{d}s + \frac{\delta M}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{t+\delta}^{2\pi} M\, \mathrm{d}s = M,$$

ein Widerspruch. Also ist $|f(z_0 + Re^{it})| = M$ für $t \in [0, 2\pi)$ und wegen der Stetigkeit sogar für $t = 2\pi$.
Damit ist $|f(z)| = M$ für $|z - z_0| = R$. Völlig analog können wir für $0 < s < R$ argumentieren, dass $|z - z_0| = s \implies |f(z)| = M$ und somit ist $|f(z)| = M$ für $|z - z_0| \leq M$. Damit hat f konstanten Betrag auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ und muss als holomorphe Funktion konstant auf dem Inneren sein. Dieses häuft sich in z_0 und zeigt, dass f nach dem Identitätssatz konstant auf G ist, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

b) G enthalte die 0, z_0 habe Betrag r und es gelte $f'(0) = 0$. Wir zeigen, dass 0 kein lokales Maximum von $|f|$ auf $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ist. Durch Translation und Kontraposition folgt dann auch die Aussage. Für $f(0) = 0$ ist nichts zu zeigen, sonst wäre $f \equiv 0$.

Also sei $f(0) = a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sei φ das Argument von z_0; für $\tau \in (\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$ gibt es ein $c > 0$ mit $ce^{i\tau} \in K$:
Wir betrachten $|ce^{i\tau} - z_0|^2 =$

$$
\begin{aligned}
&= |c\cos(\tau) - r\cos(\varphi) + ic\sin(\tau) - ir\sin(\varphi)|^2 \\
&= c^2\cos^2(\tau) + r^2\cos^2(\phi) - 2cr\cos(\tau)\cos(\phi) + c^2\sin^2(\tau) + r^2\sin^2(\varphi) - 2cr\sin(\tau)\sin(\varphi) \\
&= c^2 + r^2 - 2cr(\sin(\tau)\sin(\varphi) + \cos(\tau)\cos(\varphi)) = c^2 + r^2 - 2cr\cos(\tau - \varphi).
\end{aligned}
$$

Damit $ce^{i\tau} \in K$ ist, muss der letzte Term $\leq r^2$ werden, d. h. $c^2 - 2cr\cos(\tau - \varphi) \leq 0$, also $c \leq 2r\cos(\tau - \phi)$ sein. Der letzte Term ist nach Wahl von $\tau \in (\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$ positiv.
Wegen der Konvexität von K und $0 \in K$ liegt für $0 \leq d \leq c$ auch $de^{i\tau} \in K$. Sei $n = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) \neq 0\} \geq 2$ (das Minimum ist wohldefiniert, da die Menge nicht leer ist, sonst wäre f nämlich konstant), dann ist $f(z) = a + bz^n + z^{n+1}g(z)$ auf einer Umgebung um 0 mit holomorphem g für ein $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Falls die Gleichung $z^n = \frac{a}{b}$ eine Lösung z_j mit Argument in $(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$ hat, betrachten wir für obiges c die Abbildung $[0, c] \ni d \mapsto f(dz_j)$ und zeigen, dass für genügend kleines d immer $|f(dz_j)| > |a|$ ist. Das ist für $n \geq 3$ immer der Fall.
Dann ist $f(dz_j) = a + bd^n z_j^n + d^{n+1}z_j^{n+1}g(dz_j) = (1 + d^n)a + d^{n+1}z_j^{n+1}g(dz_j)$ und

$$
\begin{aligned}
(1 + d^n)|a| - d^{n+1}|z_j|^{n+1}|g(dz_j)| &\overset{!}{>} |a| \iff \\
d^n - d^{n+1}\underbrace{|z_j|^{n+1}|g(dz_j)|}_{\leq c} &> 0,
\end{aligned}
$$

wobei $1 + \max_{d \in [0,c]} |z_j|^{n+1}|g(dz_j)| =: c > 0$ das Maximum der stetigen Funktion $d \mapsto |z_j|^{n+1}|g(dz_j)|$ auf dem nichtleeren, kompakten Intervall $[0, c]$ nach dem Satz von Minimum und Maximum existiert. Die letzte Ungleichung wird für $0 < d < \frac{|a|}{c}$ erfüllt und für $d < \frac{|a|}{c}$ ist $|f(dz_j)| > |a| = f(0)$ und $dz_j \in K$. Also ist 0 kein lokales Maximum.
Für $n = 2$ könnten die Lösungen von $z^2 = \frac{a}{b}$ gerade einen Winkel von $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$ haben, und obiges Argument scheitern. Dann müsste man z_j etwas anders wählen, nämlich so dass das Argument von z_j in $(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$ liegt und $|a + bd^n z_j^n| > (1 + \frac{d^n}{2})|a|$ für $d \in [0, c]$ gilt. Dazu wählen wir eine Lösung x von $z^2 = \frac{(1+i)a}{2b}$ deren Argument in $(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2})$ liegt. Dazu beachte man, dass aus $z^2 = \frac{a}{b}$ und $\arg(z) = \varphi - \frac{\pi}{2}$ für $w = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ sowohl $(wz)^2 = \frac{(1+i)a}{2b}$ als auch $\arg(wz) = \varphi - \frac{\pi}{4}$ gilt und, dass $|a + bd^n(wz)^2| = |1 + \frac{d^n}{2} + \frac{d^n}{2}i| > 1 + \frac{d^n}{2}$ für $d \in (0, c]$ ist. Die weiteren Rechnungen funktionieren analog zu zuvor, weshalb auch für $n = 2$ kein Maximum von $|f|$ bei 0 vorliegen kann, da $0 < d < \frac{|a|}{2c} \implies f(dx) > |a|, dx \in K$.

(JR) und $\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$