Frühjahr 10 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Man bestimme das Volumen des Bereichs
>
> $$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1\}.$$

Lösungsvorschlag:

Bei B handelt es sich um einen Tetraeder mit den Ecken (0,0,0), (1,0,0), $(0, \frac{1}{2}, 0)$, $(0,0,\frac{1}{3})$. Das Volumen beträgt also $V(B) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$.
Wir berechnen das Volumen trotzdem noch über ein Integral. Die Bedingung $x + 2y + 3z \leq 1$ lässt sich zu $x \leq 1 - 2y - 3z$ umstellen. Also ist das Integral der Funktion $f(y,z) := 1 - 2y - 3z$ zu berechnen.
Der Integrationsbereich sind alle $\{(y,z) \in [0,\infty)^2 : 1 - 2y - 3z \geq 0\}$. Da $z \geq 0$ ist, muss $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ gelten, während für festes y in diesem Intervall dann $0 \leq z \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}y$ gelten muss.
Wir integrieren zunächst bezüglich z und erhalten wie zuvor, dass $V(B) =$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y} 1-2y-3z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[z - 2yz - \frac{3}{2}z^2 \right]_0^{z=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^2 \, \mathrm{d}y =$$

$$\left[\frac{y}{6} - \frac{y^2}{3} + \frac{2}{9}y^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{2}{72} = \frac{1}{36}.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$