Frühjahr 10 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = p(x)x$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Man zeige: Ist $p(0) > 0$, so ist 0 ein nichtstabiles Gleichgewicht.

(b) Für $\xi > 0$ beweise man: ξ ist genau dann ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht, wenn die Funktion p für ein $r > 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt: $p(x) > 0$ für $\xi - r < x < \xi$ und $p(x) < 0$ für $\xi < x < \xi + r$.

Lösungsvorschlag:

(a) Nach dem Linearisierungssatz ist 0 instabil, da die Ableitung der Strukturfunktion $f(x) = p(x)x$ also $f'(x) = p'(x)x + p(x)$ an der Stelle 0 $f'(0) = p(0) > 0$ positiv ist, und weil $f(0) = 0$ bedeutet, dass 0 überhaupt eine Gleichgewichtslösung ist.

(b) Sei zunächst $\xi > 0$ ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht. Angenommen die Nullstellen von p würden sich in ξ häufen, d. h. es gäbe ein Folge $\xi \neq x_n \in \mathbb{R}$ mit Grenzwert ξ, die aus Nullstellen von p besteht. Dann wären die Funktionen $x(t) \equiv x_n$ Lösungen der Differentialgleichungen, die gegen $x_n \neq \xi$ konvergieren. Weil für alle $\delta > 0$ ein x_n mit $|x_n - \xi| < \delta$ existiert, kann per Definitionem ξ nicht attraktiv, also auch nicht asymptotisch stabil sein.
Da ξ selbst ein Gleichgewicht ist, gilt $p(\xi) = 0$ und es gibt ein $r > 0$, sodass p keine Nullstelle auf $(\xi - r, \xi + r)$ besitzt. Zudem wechselt p nach Bolzanos Nullstellensatz jeweils das Vorzeichen auf $I_: = (\xi - r, \xi)$ sowie auf $I_+ := (\xi, \xi + r)$ nicht.
Wäre p positiv auf I_+, so würde für jedes $\xi < x_0$ die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ eine streng monoton wachsende Funktion sein, da die Ableitung stets positiv sein muss. Das gilt auch noch, falls $x(t) > \xi + r$ wird, da sonst eine Ruhelage geschnitten würde. Die Lösung kann dann aber nicht gegen ξ konvergieren, da für $t > 0$ auch $x(t) > x_0 > \xi$ gilt. Analog widerlegt man, dass p negativ auf I_- sein könnte, was den Beweis beendet.
Jetzt habe p die angegebenen Eigenschaften. Nach Bolzanos Nullstellensatz (oder dem Zwischenwertsatz) muss $p(\xi) = 0$ sein, also ist ξ eine Gleichgewichtslösung. Da die vorliegende Gleichung eindimensional ist, ist asymptotische Stabilität äquivalent zur Attraktivität, die wir jetzt zeigen werden.
Sei $x_0 \in (\xi - r, \xi + r)$ und x die maximale Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Falls $x_0 > \xi$ ist, folgt $x' < 0$ auf dem maximalen Existenzintervall, also fällt die Lösung streng monoton. Da sie nach unten durch ξ beschränkt ist, existiert sie mindestens auf $[0, \infty)$ und konvergiert gegen einen Grenzwert $\hat{x} \in [\xi, x_0)$. Wäre $\hat{x} \neq \xi$, so wäre für ein $t_0 \in [0, \infty)$ und alle $t \geq t_0$ die Ableitung $x'(t)$ nach oben durch $c := \frac{p(\hat{x})\hat{x}}{2} < 0$ beschränkt. Dann wäre $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s \leq x(t_0) + c(t - t_0)$, was für $t \to \infty$ einen Widerspruch zu $x(t) > \xi$ liefert. Also muss x gegen ξ konvergieren. Analog geht man für $x_0 < \xi$ vor.

$\mathcal{J.F.B.}$