**Frühjahr 10 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

> Man bestimme alle Lösungen des Systems von Differentialgleichungen
>
> $$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$
>
> Hat das System eine stabile oder asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung?

**Lösungsvorschlag:**

Das System besitzt genau dann eine (asyptotisch) stabile Gleichgewichtslösung, wenn die Nulllösung eine solche ist. (Das gilt zwar allgemein für lineare Systeme, ist hier aber daran zu sehen, dass die Matrix invertierbar ist, weshalb 0 die einzige Gleichgewichtslösung ist.) Da die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. 1 ist ein positiver Eigenwert, 0 also instabil. Die Antwort auf beide Fragen ist daher negativ.
Wir erkennen, dass für die Bestimmung der Transformation auf die Normalform der Strukturmatrix, die Bestimmung einer Jordankette zu -1 nötig wäre, was wir hier vermeiden wollen, also lösen wir das System direkt.
Ist $(x_1, x_2, x_3)$ eine Lösung, so folgt $\dot{x}_3 = x_3$, also $x_3(t) = ce^t$ für ein $c \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt $\dot{x}_2 = -x_2 + 4ce^t$. Die homogene Lösung ist von der Form $be^{-t}$ für $b \in \mathbb{R}$.
Wir brauchen noch eine partikuläre Lösung und raten $x_2(t) = 2ce^t$. (Ansatz: $se^t$)
Daher ist $x_2(t) = 2ce^t + be^{-t}$ für $b, c \in \mathbb{R}$.
Analog folgt $\dot{x}_1 = -x_1 + be^{-t}$ mit homogener Lösung $ae^{-t}$. Wir erraten die partikuläre Lösung $x_1(t) = bte^{-t}$. (Ansatz: $ste^{-t}$) Daher ist $x_1(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$.
Die allgemeine Lösungsmenge der Gleichung lautet also

$$\{x(t) = (ae^{-t} + bte^{-t}, 2ce^t + be^{-t}, ce^t) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann noch nachrechnen, dass dieser dreidimensionale Funktionenraum nur Lösungen des Systems enthält und daher alle Lösungen wiedergibt.

$\mathcal{J.F.B.}$