Frühjahr 10 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2)$$

mit einem positiven Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie mithilfe von Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ alle periodischen Lösungen sowie deren (minimale) Periode $T > 0$.

b) Bestimmen Sie für jede Lösung des Systems den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion des Systems ist stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig. Verschiedene Lösungen dürfen sich also nicht schneiden. Der Ursprung stellt eine Ruhelage und daher eine Lösung dar. Jede andere (insbesondere jede periodische) Lösung darf den Ursprung nicht durchlaufen. Bei Transformation in Polarkoordinaten dürfen wir also $r > 0$ voraussetzen.
Wir müssen ein Differentialgleichungssystem für r und θ finden, dass uns ermöglicht die Lösungen des eigentlichen Systems zu bestimmen. Wir beginnen mit einer Idee. Wir transformieren ein System $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ mit C^1-Funktionen f, g mittels Polarkoordinaten. Es muss dann

$$r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)\theta' = x' = f \text{ sowie } r'\sin(\theta) + r\cos(\theta)\theta' = y' = g$$

gelten. Lösen wir die erste Gleichung (für zulässige θ) nach r' auf, so folgt $r' = \frac{f}{\cos(\theta)} + r\tan(\theta)\theta'$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein und lösen wir diese nach θ' auf, so erhalten wir (wieder für zulässige Werte von r, θ) die Gleichung

$$\theta' = \frac{g - f\tan(\theta)}{r(\sin(\theta)\tan(\theta) + \cos(\theta))}.$$

Wegen $\sin(\theta)\tan(\theta) + \cos(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}$ und $\tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$ können wir die Gleichung für θ' zu $\theta' = \frac{g\cos(\theta)-f\sin(\theta)}{r}$ umschreiben. Eingesetzt in die Gleichung für r' folgt

$$r' = \frac{f}{\cos(\theta)} + \tan(\theta)\cos(\theta)g - \tan(\theta)\sin(\theta)f.$$

Wegen den vorherigen trigonometrischen Gleichungen wird daraus $r' = f\cos(\theta) + g\sin(\theta)$.
Wir hatten zuvor begründet, dass $r > 0$ angenommen werden kann. Man rechnet allgemein nach, dass Funktionen r, θ (abhängig von t), die

$$r' = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta)$$

sowie

$$\theta' = \frac{1}{r}(g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) - f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta))$$

erfüllen, mittels $x := r\cos(\theta), y := r\sin(\theta)$ zu Lösungen des Systems

$$x' = f(x,y), y' = g(x,y)$$

führen. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf und der Entwicklung jeder Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten $(x_0, y_0) = (r_0\cos\phi_0, r_0\sin\phi_0)$ erhält man mit einer Lösung des vorherigen Systems zur Anfangsbedingung $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$ auch eine Lösung des Systems $(x', y') = (f(x,y), g(x,y))$. Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert nun, dass wir jede Lösung durch die Transformation erhalten.

In unserem Falle erhalten wir damit das Gleichungssystem

$$r' = (-r\sin(\theta) + r\cos(\theta)(\lambda - r^4))\cos(\theta) + (r\cos(\theta) + r\sin(\theta)(\lambda - r^4))\sin(\theta) = r(\lambda - r^4)$$

$$\theta' = \frac{1}{r}((r\cos(\theta) + r\sin(\theta)(\lambda - r^4))\cos(\theta) + (r\sin(\theta) - r\cos(\theta)(\lambda - r^4)\sin(\theta))) = 1.$$

Die Lösungen von $\theta' = 1$ sind die Funktionen $\theta_c(t) = t + c$ für $c \in \mathbb{R}$.

Die Lösungen von $r' = r(\lambda - r^4)$ sind entweder streng monoton oder konstant. Falls r streng monoton, also injektiv, ist, kann $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ nicht periodisch sein, weil aus $t \neq s \implies r(s) \neq r(t)$ auch $(r(s)\cos(\theta(s)), r(s)\sin(\theta)) \neq (r(t)\cos(\theta(t), r(t)\sin(\theta(t)))$ folgt, sonst würde man durch Betrachtung der euklidischen Norm dieser beiden Vektoren den Widerspruch $r(s) = r(t)$ erhalten. Die Lösung ist also injektiv und daher nicht periodisch.

Für $r = 0$ würden wir wie zuvor besprochen die konstante Lösung $x \equiv 0 \equiv y$ erhalten. Die einzige andere konstante Lösung ist $r \equiv \sqrt[4]{\lambda}$. Die zugehörigen Lösungen sind $(x(t) = \sqrt[4]{\lambda}\cos(t+c), \sqrt[4]{\lambda}\sin(t+c))$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Diese Lösungen sind periodisch mit minimaler Periode $T = 2\pi$.

b) Für jede Lösung stimmt in der transformierten Form der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} |x(t)|$ mit $\lim_{t\to\infty} r(t)$ überein. Da r eine Lösung der autonomen Gleichung $r' = r(\lambda - r^4)$ sein muss, untersuchen wir diese genauer.

Weil die rechte Seite der Gleichung für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert ist, muss jede Lösung entweder divergieren, und wegen der Monotonie dann gegen $\pm\infty$ streben, oder gegen eine Ruhelage konvergieren. Wir interessieren uns nun nur für nichtnegative Anfangsbedingungen $r_0 \geq 0$.

Sei x die maximale Lösung des Systems der Aufgabe zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ sowie $r_0 := \|x_0\|_2$.

Falls $r_0 = 0$ oder $r_0 = \sqrt[4]{\lambda}$ ist, ist die Lösung r konstant und konvergiert gegen r_0.

Falls $0 < r_0 < \sqrt[4]{\lambda}$ ist, so muss die Lösung wegen $r'(0) > 0$ streng monoton steigen. Da die Ruhelage $\sqrt[4]{\lambda}$ nicht geschnitten werden darf, r nicht gegen 0 konvergieren kann, und keine weitere Ruhelage existiert, kann die Lösung nicht divergieren und der Grenzwert lautet in diesem Fall $\sqrt[4]{\lambda}$.

Analog konvergiert für $r_0 > \sqrt[4]{\lambda}$ die Lösung gegen $\sqrt[4]{\lambda}$, da diese dann wegen $r'(0) < 0$ mononoton fällt und nicht gegen 0 komvergieren kann, da sonst die Ruhelage $\sqrt[4]{\lambda}$ geschnitten werden müsste.

Für $x \equiv (0{,}0)$ beträgt der Grenzwert also 0; in jedem anderen Fall beträgt er $\sqrt[4]{\lambda}$.

$\mathcal{J.F.B.}$