Frühjahr 10 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1x_2$$

mit beliebigen positiven Koeffizienten a, b, c, d.

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Welche Stabilitätsaussagen lassen sich über diese Gleichgewichte durch Linearisierung herleiten?

Lösungsvorschlag:

a) Die erste Komponente $x_1(a - bx_2)$ verschwindet genau dann, wenn $x_1 = 0$ oder $x_2 = \frac{a}{b}$ ist. Analog verschwindet die zweite Komponente $x_2(-c + dx_1)$ genau dann, wenn $x_2 = 0$ oder $x_1 = \frac{c}{d}$ ist.
Daher existieren vier Gleichgewichtslösungen, nämlich (0,0), $(0, \frac{a}{b})$, $(\frac{c}{d}, 0)$ sowie $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

b) Die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist $J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & dx_1 - c \end{pmatrix}$. Für (0,0) ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$, die den positiven Eigenwert a hat. Ergo ist (0,0) instabil.
Für $(0, \frac{a}{b})$ erhalten wir $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\frac{a}{b} & -c \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten 0 und $-c$. Da das System nichtlinear ist, die Matrix lediglich Eigenwerte mit verschwindendem Realteil, aber keinen mit positivem Realteil besitzt, ist keine Aussage möglich.
Für $(\frac{c}{d}, 0)$ erhalten wir $\begin{pmatrix} a & -b\frac{c}{d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, was den positiven Eigenwert a besitzt. Daher ist diese Ruhelage instabil.
Für $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ erhalten wir $\begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}$; das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + ac$, was genau die Nullstellen $\pm\sqrt{ac}i$ besitzt. Hier ist wieder keine Aussage möglich, weil Eigenwerte mit verschwindendem Realteil existieren, aber keiner mit positivem Realteil vorliegt.

J.F.B.