Frühjahr 10 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Sei $f_n : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \sum\limits_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{z+k}$.
> Zeigen Sie, dass durch $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ definiert wird.

Lösungsvorschlag:

Jedes Funktionenfolgeglied f_n ist holomorph auf der offenen Menge $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Wir formen die angegebene Darstellung ein wenig um.
Für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} = \frac{2z}{z^2-k^2}$. Daher ist $f_n(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Wir werden nun zeigen, dass f_n eine auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ kompakt konvergente Funktionenfolge ist, dann ist ihr Grenzwert $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ebenfalls holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.
Sei $K \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ eine kompakte Teilmenge. K ist beschränkt gegen ein $C > 0$ (d. h. $z \in K \implies |z| \leq C$); wir betrachten $M := \{z \in \mathbb{Z} :\ |z| \leq C\}$. Diese Menge ist endlich, denn sie enthält genau die Werte $-\lfloor C \rfloor, 1 - \lfloor C \rfloor, ..., \lfloor C \rfloor - 1, \lfloor C \rfloor$. Es bezeichne $c > 0$ den Abstand zu K, d. h. für $z \in M$ sei $c_z := \min\limits_{k\in K} |z-k|$ und c sei der kleinste dieser endlich vielen Werte. Dabei existiert das Minimum, da $K \ni k \mapsto |z-k|$ stetig auf einem Kompaktum ist, und es ist positiv, da $z \notin K$, also $|z-k| \neq 0$ ist.
Für alle $z \in K$ gilt $|\frac{1}{z}| = |\frac{1}{z-0}| \leq \frac{1}{c}$; $|\frac{2z}{z^2-k^2}| = \frac{2|z|}{|z-k|\cdot|z-(-k)|} \leq \frac{2C}{c^2}$ für $k \in M$ und $|\frac{2z}{z^2-k^2}| \leq \frac{2C}{k^2-C^2}$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash M$.
Daher ist $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{c} + \frac{2C\lfloor C \rfloor}{c^2} + \sum\limits_{k=1+\lfloor C \rfloor}^{n} \frac{2C}{k^2-C^2}$, was für $n \to \infty$ konvergiert.
Nach Weierstraß M-Test konvergiert f_n gleichmäßig auf K. Da $K \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ ein beliebiges Kompaktum war, konvergiert f_n kompakt auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ und der Limes ist holomorph.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$