Frühjahr 10 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Sei $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) := -1 + 3e^{it}$. Berechnen Sie
>
> $$\int_\gamma \frac{(3+z)^2}{(1+9z^2)(9-z^2)} \mathrm{d}z$$
>
> und erläutern Sie Ihre Rechenschritte.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen das Integral mit dem Residuensatz. Der Integrand wird auf $\mathbb{C} \backslash \{3, -3, \frac{i}{3}, -\frac{i}{3}\}$ mit f bezeichnet und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.
Der Weg γ ist geschlossen und glatt und verläuft durch keine der Singularitäten von f. Außerdem ist $\mathbb{C}$ offen und konvex und die Singularitätenmenge endlich. Daher ist der Residuensatz anwendbar.
Die Singularität 3 wird von γ nicht umkreist. Die restlichen drei werden alle genau zweimal in positiver Orientierung umwunden. Wir berechnen die Residuen in diesen drei Punkten.
-3 ist doppelte Nullstelle des Zählers und einfache Nullstelle des Nenners und daher hebbar. Das Residuum in -3 beträgt also 0.
Die anderen beiden Residuen sind einfache Nullstellen des Nenners, bei nicht verschwindendem Zähler, also Pole erster Ordnung. Nach der Polformel beträgt das Residuum in $\pm\frac{i}{3}$ daher nach Kürzung des Faktors $3 + z$

$$\mathrm{Res}_{\pm\frac{i}{3}}(f) = \frac{3 \pm \frac{i}{3}}{2 \pm 18i} = \frac{1}{6}\frac{9 \pm i}{1 \pm 9i}.$$

Nach dem Residuensatz beträgt das Integral $4\pi i(\ \mathrm{Res}_{\frac{i}{3}}(f) + \mathrm{Res}_{-\frac{i}{3}}(f)) = 8\pi i \ \mathrm{Re}\ \left(\frac{3+\frac{i}{3}}{2+18i}\right)$, da die Residuen in $\pm\frac{i}{3}$ zueinander komplex konjugiert sind.
Es gilt $\frac{3+\frac{i}{3}}{2+18i} = \frac{9+i}{6+54i} = \frac{1}{6}\frac{9+i}{1+9i} = \frac{1}{6}\frac{18-80i}{82}$, was einen Realteil von $\frac{3}{82}$ hat.
Das Integral beträgt demnach $\frac{12\pi i}{41}$.

J.F.B.