Frühjahr 10 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem *kurzen* Beweis oder einem Gegenbeispiel!

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, dann ist f konstant.

b) Wenn $f(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i$.

d) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat in 0 keinen Pol.

e) Die Funktion $r \mapsto \int_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z$ ist konstant auf $(0, \infty)$.

f) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wahr. Die Funktion $g(z) = \exp(if(z))$ ist ganz und wegen $|g| \equiv 1$ beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Daher ist $0 \equiv g' = if'g$ und wegen $ig(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $f' \equiv 0$. Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist f konstant.

b) Wahr nach dem Identitätssatz, da sich die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ in 0 häuft.

c) Wahr. Sei p das Polynom mit $p' = f, p(0) = 0$, dann hat p mindestens Grad 1, da $f \not\equiv 0$ sein muss. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 2\pi i$. Für $\gamma(t) := tz$ gilt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma p'(z)\mathrm{d}z = p(\gamma(1)) - p(\gamma(0)) = p(z) - p(0) = 2\pi i$.
Das gilt sogar für $f \equiv c, c \neq 0$.

d) Das ist nicht allgemein wahr, z. B. besitzt $\frac{1}{f}$ für $f(z) = z$ in 0 einen Pol erster Ordnung.

e) Das ist wahr. Die Integrale entsprechen Wegintegralen über die geschlossenen, glatten Wege $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$, die nach Cauchys Integralsatz 0 ergeben. Die Funktion ist also konstant 0.

f) Wahr. Die Potenzreihe entspricht der Taylor-Entwicklung von f im Entwicklungspunkt 1. Diese konvergiert zumindest auf der maximalen offenen Kreisscheibe im Holomorphiegebiet von f, hier also auf ganz $\mathbb{C}$.

$\mathcal{J.F.B.}$