Frühjahr 10 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie alle Singularitäten von

$$f(z) = \frac{e^{\sin(z)} - \cos(z) - z}{\sin^2(z)}$$

sowie deren Typ (einschließlich der Ordnung jedes auftretenden Pols). Sie dürfen die Nullstellen der komplexen Sinusfunktion als bekannt voraussetzen.

Lösungsvorschlag:

Die Singularitäten sind genau die Nullstellen des Nenners, also genau die Nullstellen der komplexen Sinusfunktion, also die ganzzahligen Vielfachen von π. Diese sind einfache Nullstellen des Sinus, ergo doppelte Nullstellen vom Sinusquadrat.
Alle Nullstellen sind reell, daher untersuchen wir die Funktion $g(t) := e^{\sin t} - \cos t - t$ für $t \in \mathbb{R}$ genauer. Es ist $e^{\sin z} \in [\frac{1}{e}, e]$ und $\cos(z) \in [-1,1]$, also ist $e^{\sin z} - \cos z \in [\frac{1}{e} - 1, 1 + e]$. Damit g eine Nullstelle besitzt, muss $e^{\sin z} - \cos z = z \in [\frac{1}{e} - 1, 1 + e] \subset (-\pi, 2\pi)$ sein. Wir interessieren uns nur für die ganzzahligen Vielfachen von π. Die einzigen dieser Werte im kritischen Intervall, sind $t = 0$ und $t = \pi$. Offensichtlich ist $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ und $g(\pi) = 1 - (-1) - \pi = 2 - \pi \neq 0$. Daher ist 0 Nullstelle von g, π dagegen nicht. Wegen $g'(t) = e^{\sin z} \cos z + \sin z - 1$ und $g'(0) = 0$ ist 0 zumindest eine doppelte Nullstelle von g.
0 ist eine doppelte Nullstelle des Nenners und mindestens eine doppelte Nullstelle des Zählers, daher also eine hebbare Singularität.
Für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist $k\pi$ doppelte Nullstelle des Nenners, jedoch keine Nullstelle des Zählers, also ein Pol zweiter Ordnung.
Weitere Singularitäten existieren nicht.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$