Frühjahr 10 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen harmonisch sind.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil $u(x + iy) = x^2 + y^2$ ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

a) Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar, und ihr Real- und Imaginärteil dementsprechend auch, insbesondere also zweimal stetig differenzierbar. Außerdem genügen diese den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Nach dem Satz von Schwartz folgt

$$\Delta u = \partial_{xx}u(x,y)+\partial_{yy}u(x,y) = \partial_x\partial_y v(x,y)-\partial_y\partial_x v(x,y) = \partial_{xy}v(x,y)-\partial_{yx}v(x,y) = 0 \text{ sowie}$$

$$\Delta v = \partial_{xx}v(x,y)+\partial_{yy}v(x,y) = -\partial_x\partial_y u(x,y)+\partial_y\partial_x u(x,y) = -\partial_{xy}u(x,y)+\partial_{yx}u(x,y) = 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f = u + iv$ mit $u, v(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy)$.

b) Nein, da $\Delta u(x,y) = 2 + 2 = 4$ nicht harmonisch ist, gibt es nach a) kein solches f.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$