Frühjahr 10 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Geben Sie alle Lösungen von
>
> $$x^{(5)} - 2x^{(3)} + \dot{x} = e^t$$
>
> für reelles $t \in \mathbb{R}$ an.
> Hinweis: Ansatz für eine partikuläre Lösung : $x(t) = p(t)e^t$ mit einem Polynom $p(t)$.

Lösungsvorschlag:

Die homogene Gleichung besitzt die charakteristische Gleichung $y(y-1)^2(y+1)^2 = y^5 - 2y^3 + y = 0$. Für den Ansatz aus dem Hinweis beschränken wir uns auf ein Polynom vom Grad 2, weil 1 eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Dies führt auf

$$e^t = (10p'' + 5p' + p - 6p'' - 6p' - 2p + p' + p)e^t = (4p'')e^t,$$

also $p'' \equiv \frac{1}{4}$ und $p = \frac{t^2}{4}$. (Man kann zu p auch noch affine Funktionen addieren, diese sind aber Lösungen der homogenen Gleichung, liefern also weitere partikuläre Lösungen.)
Die allgemeine Lösung ist $x(t) = \frac{t^2}{4} + a + be^t + cte^t + de^{-t} + fte^{-t}$ mit $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$