Frühjahr 09 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass f eine nicht konstante, affine Funktion ist, d. h., es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = az + b,\ z \in \mathbb{C}$. (Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Art der Singularität von f in ∞.)

Lösungsvorschlag:

Da f ganz sein soll, können wir f in eine Potenzreihe um 0 entwickeln, d. h. $a_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$ finden. Wir betrachten $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ g(z) := f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$.
Falls f transzendent wäre, würde die Laurent-Entwicklung von g um 0 nie abbrechen und 0 wäre eine wesentliche Singularität. Da f injektiv, also nicht konstant ist, ist auch g nicht konstant. Wir betrachten das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < \frac{1}{2}\}$. Auch hierauf ist g holomorph aber nicht konstant, also gebietstreu. Das Bild ist wieder ein Gebiet und enthält $g(1)$. Dabei handelt es sich um einen inneren Punkt, es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(1) - z| < \varepsilon \implies z \in g(\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < \frac{1}{2}\})$. Wir betrachten jetzt $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < \frac{1}{2}\}\backslash\{0\}$. Nach dem Satz von Casorati, ist das Bild dieser Menge unter g dicht in $\mathbb{C}$, es gibt also ein $w \in \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < \frac{1}{2}\}\backslash\{0\}$ mit $|g(w) - g(1)| < \varepsilon$. Nun folgt aber auch $g(w) \in g(\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < \frac{1}{2}\})$, also $g(w) = g(\tilde{w})$ für ein $\tilde{w} \in \mathbb{C}$ mit $|\tilde{w} - 1| < \frac{1}{2}$. Aus der Injektivität von g folgt $w = \tilde{w}$ und somit $1 = |1-0| \leq |1-\tilde{w}| + |w-0| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ein Widerspruch.
(Statt den Satz von Casorati zu verwenden, könnte man auch mit dem Satz von Piccard argumentieren.)
Demnach kann 0 keine wesentliche Singularität von g sein. Wäre 0 hebbar, so wäre $g(z) = a_0$ für alle z, also g und somit auch f konstant, wieder ein Widerspruch zur Injektivität. Daher muss 0 eine Polstelle von g sein und f ist ein Polynom.
Sei f ein Polynom n-ten Grades, dann gibt es nach dem Fundamentalsatz der Algebra, mit Vielfachheit gezählt, genau n Nullstellen von f in der komplexen Ebene. Da f injektiv ist, kann es nur eine Nullstelle z_0 geben und diese muss Vielfachheit n besitzen.
Entwickelt man f um z_0, so folgt $f(z) = a(z-z_0)^n$ für ein $a \neq 0$, denn höhere Summanden oder $a = 0$ würden $\deg f = n$ widersprechen und geringere Summanden würden $\operatorname{ord}(z_0) = n$ widersprechen. Wäre $n > 1$ so könnten wir eine von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel ξ finden (da davon genau n verschiedene existieren) und es würde $f(z_0 + 1) = f(z_0 + \xi) \implies z_0 + 1 = z_0 + \xi \implies 1 = \xi$ folgen, ein Widerspruch.
Also ist $n = 1$ und $f(z) = a(z - z_0) = az + (-az_0)$. Setzt man $b := -az_0$, so folgt $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$.

$\mathcal{J.F.B.}$